

第 1 章

理系編 自然界を再現しよう

1.1 はじめに: 全体の大枠を掴もう

1.1.1 講座の目的: 微分方程式のシミュレーション

今回はイントロとして説明することがいくつかあります。私が作っている他の講座と同じように、この中高数学駆け込み寺では細かいことを詳しくやるのではなく、数学を勉強するモチベーションになるように**数学の大きな姿をお見せしていきます**。で、実際に何をするのかというと、**微分方程式のシミュレーション**を通じて中高数学の大枠を掴んでいきます。もっと具体的には微分方程式のシミュレーションには中高でやるほとんどの数学が全て出てきます。

- **この数学はこんなところでこういう風に使うのか!**

使われているシーンを具体的に見てもらってモチベーションにしてもらおう、そんな講座です。この講座では**文字計算には慣れている**ことを前提にしています。

1.1.2 微分方程式って何？

- 微分方程式はどこでどんな風に使われているの？
- この講座では具体的にどんなことをするの？

あなたが中高生なら微分は聞いたこともないかもしれません。あなたが中高の数学の復習をしたいと思っている大人なら、「自分にはまだ微分なんて早いんじゃないか？」と思っているかもしれません。メインの微分方程式が何だかわからないんじゃないか読み進めるのはきついですよね？ というわけでまずは微分方程式の説明をします。

微分方程式は理工系の基礎です。いわゆる自然法則は微分方程式で表現されることが多いのです。これがどこで使われるかという、例えば洪水が起きたときの被害予測に使われます。どんな規模で起きた洪水が市街地のどこまで進入してくるか、そんなシミュレーションをテレビなどで見たことがないでしょうか？ このシミュレーションに使われているのが微分方程式です。

1.1.3 微分方程式は何に使うの？

他にも微分方程式はありとあらゆるところで使われています。ゲームのCGを自然に見せるためにはまさに自然法則に則って風や水の動きを表現しないとけません。だから微分方程式がその背後に隠れています。天気予報は今の気象条件から未来の様子を予測する必要があります。この予測にも微分方程式を使っています。機械を動かしていると熱くなることがありますね？ あまりにも熱くなりすぎると機械が暴走してしまうので熱を効率よく逃がす必要があります。そのためには熱の流れを考えてその流体の動きをきちんと制御する必要があります。ここでは熱の流れの微分方程式を考えてそれをシミュレーションします。車を作るとき空気抵抗を調べるためにも流体力学が必要なので、シミュレーションはモノづくりにも活かされています。他にもいちいち挙げきれないくらい、身の回りに微分方程式のシミュレーショ

ンを使っているモノがあります。

微分方程式自体をきちんと調べようと思うと大学の数学が必要です。しかしシミュレーションを中心に考えれば**中高の数学でかなりいろいろなことがわかります**。わかるだけじゃなくて実際に微分方程式を解いて遊んでみることでだってできます。この**自分でも遊べる**ところまで持っていけるのが大事じゃないかと思っていて、それが微分方程式のシミュレーションをテーマに選んだ理由の 1 つです。

さて、ここまでで微分方程式が何で大事かはわかってもらえたでしょうか？ これをやれば数学をいろいろ遊び倒せそうと思ってもらえたら嬉しいです。ちゃんとがんばれば自分でゲームを作ったりもできますしね。次はもう少し数学的な内容に踏み込みましょう。

何はともあれ微分に関する話をやるわけです。そして微分は高校でやる内容です。あなたは微分に対して嫌な思い出を持っているかもしれません。あなたは「中学レベルからやり直したいのにそんなの無理だ!」と思っているかもしれません。もっと簡単などころからやってほしいと思っているかもしれません。

でもこの講座では中高数学の大枠を掴んでもらう講座です。そして今回はこの講座の大枠を掴んでもらう講座です。どうかもうしばらく辛抱して読み進めてください。

1.1.4 シミュレーションの実際

まず何をするのかを見てもらいたいので、次のページを開いて 1 番下までスクロールしてください。動画の再生ボタンがありますから動画を再生してみましょう。

- <http://tinyurl.com/zkljj9h>

これは 1 次元移流方程式のシミュレーション結果です。プログラムを書いてコンピュータに計算させ、その結果をアニメーションさせています。移流

方程式は微分方程式なのでそこで微分を使っています。

コンピュータは数学的に厳密に微分を計算できません。極限が取れないからです。そうかといって全く何もできないわけでもありません。実は微分の定義にしたがって微分を**近似**して計算しています。微分を近似すると実はただの引き算（と割り算）になります。

さっきのページの上の方、式 (2)-(4) を見てください。こっちにも同じ式を書いておきますね。

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}. \quad (1.1.1)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (1.1.2)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n). \quad (1.1.3)$$

最初の式が微分の近似式です。そのあと添字がごちゃごちゃ多い文字計算ではありますが、やっているのは**加減乗除の四則演算**だけです。特に上のページの (4) にあたる式 (1.1.3) に注目してください。実はこの式にしたがって計算した結果をアニメーションでお見せしたのがさっきの動画です。

細かいことは追々やっていくとして何をしているか大雑把にいうと、**ベクトルなり数列なりの計算**です。また式 (1.1.3) を見てください。右上にある添字 n に注目すれば左辺は $n + 1$ で右辺は n です。これは数列の漸化式とも思えますね？

微分と同じく数列も高校でやる内容です。あなたが中学生ならちんぷんかんぷんでしょう。まずは少なくとも高校でやるのがモノづくりの現場をはじめとしているいろいろなところで出てくること、役に立っていることを知ってもらえれば OK です。その成果は身の回りにもたくさんありますからね。ちなみに移流方程式は事例紹介でちょっと出てきた流体力学で出てくる微分方程式です。

中学の数学という話なら、**文字式の計算がゴリゴリ出てきている**ことを注意した方がいいでしょうか？文字式できないとこの計算全く追えないですからね。今回そこまで深入りはできないものの、もっと難しいことをやろうと思うと**連立 1 次方程式**も出てきます。細かいことを言い出すときりがないから、今回はこのくらいにしておきましょう。

1.1.5 今回のポイント

- **微分方程式のシミュレーション**をやっていく。
- **シミュレーション**は実社会でいろいろな応用がある
- **微分**といっても**近似**を使うから結局は**加減乗除**になる。
- **シミュレーション**では**文字式の計算**、**ベクトル**、**数列**など**中高の数学**を**バリバリ**使っている。

今回くらいのレベルでもベクトルで言うと **100 次元ベクトル**とかそういうレベルの計算が必要です。**手計算ではやってられない**のでプログラムを書いて計算して、さらにプログラムを書いて図にしたりアニメーションにしたりしています。

あなたはプログラミングに興味があるかもしれません。しかし**プログラミングの詳しい話は別の機会に回します**。講座のボリュームが大きくなりすぎるからです。まずは数学に集中しましょう。

今回お見せしたのは変数が 2 つある偏微分方程式でちょっと難しいです。変数が 2 つあるとややこしいので次回以降は、変数が 1 つしかない**常微分方程式**を見ていきます。

今回はここで終わりです。お疲れさまでした。

1.1.6 アンケートをお願いします。

最後にアンケートをお願いします。改善に繋がっていきたいのでぜひコメントをお願いします。

- <https://goo.gl/forms/uQikzCF209GiCCw92>

ではまた次回をお楽しみに!