

2 厳密解との比較: 放射性物質の崩壊

2.1 近似とは?

今回アニメーションはありませんが引き続きシミュレーションの話をしていきます。今回のテーマは近似についてです。

シミュレーションというのはいいし、近似というのもいいけど、**実際のくらいよく近似できてるの?**

こういう問題を考えてみましょう。ちゃんと使えばすごく精度はいいですよ、というのが今回の主張です。

- **微分方程式というのはいいけど近似なんて雑なことしたくない!**
- **近似なんてやって意味あるの? どうせ大雑把で使いものにならないんじゃないの?**
- **百歩譲って微分方程式は役に立つとしてもその近似計算は本当に役に立つの?**

こんな疑問に答えるのが今回のテーマです。

2.2 放射性物質の崩壊に関する微分方程式

で、ちょっと不吉な例ではありますが。しかしというか残念ながらというか、役に立つ例になってしまったので**放射性物質の崩壊に関する微分方程式**を考えてみましょう。いちおう微分方程式から書いておきますね。

$$\frac{dx}{dt} = -cx. \quad (2.1)$$

気分だけ説明しておくとして放射性物質が単位時間あたりに崩壊するスピードはそのときの放射性物質の量に比例する、というのを式で書いた形です。 c には物理的に大事な意味がありますが式や計算を軽くするためにここでは $c = 1$ にして話を進めます。そして前回のようにこの微分方程式を近似した式を書いてみます。

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = -x_n. \quad (2.2)$$

これは時間間隔 h が十分小さければ時間 h だけ離れた放射性物質の量 x_{n+1} と x_n の関係が上の式で書けることを意味しています。

2.3 近似計算はどのくらい正確なの？

物理的な話はこのくらいにして、この式にしたがって近似計算 (シミュレーション) したとき、**本当の答えと近似した解がどのくらい近いのか**を考えてみます。何でこれにしたかというもとの方程式の答えが厳密に書けるからです。あなたが指数関数、特に自然対数の底 e をご存知なら、式 (2.1) の答えは $x(t) = Ce^{-t}$ と書けます。指数関数の微分をご存知ならこれを (2.1) に代入してみて本当に方程式の答えになっていることを確認してみてください。

この答えと式 (2.2) にしたがって計算した答えがどのくらい一致するか、コンピュータに計算させてみましょう。結果はこの記事の後半、プログラムパートに載せてあります。

2.4 近似なんていい加減ことしたくない!

あなたは「近似なんて雑なことしていいの?」なんて思っているかもしれませんが、でも「比較のために重ねる」のところのグラフを見るとわかるように、厳密な様子ともよく合っているのでちゃんと使えば問題ありません。

「ちゃんと使う」の「ちゃんと」が難しいと言われればそれはもちろんそうなのですが、それは本当に難しい話です。

せっかくなので分割をどんどん大きくして行って近似の精度が上がっていく様子もグラフにしておきました。プログラムが書けるとこういうのもささっとやれます。遊びやすくなるのは本当にありがたいですね。中高生の頃にこれを知っていたら数学や物理だけじゃなくてプログラミングにもはまっていたと思います。

やってみるとわかるんですが、書いたプログラムで意図通りの結果が出るとけっこう嬉しいです。パラメータをいじったり方程式を変えたり、ちょろっといじって遊べる要素も増えて遊べる範囲が広がるのもいいですね。

Python プログラミングに関する資料、数値計算・シミュレーションに関する資料は GitHub に上げてありますし、今後も講座の進展に合わせて少しずつ増やしていくのでぜひあなたも遊んで遊んでみてください。このサイトにもいろいろな情報がありますよ。

- <https://github.com/phasetr/mathcodes>

2.5 数学的なポイントまとめ

あと今回の中高数学上のポイントを復習しておきます。指数関数とか自然対数の底とか、はたまたその微分が出てきました。放射性物質の崩壊をちゃんと調べるにはこういう数学が必要なんです。

2.6 次回は経済や生物ネタです!

次回はまた別の微分方程式を紹介します。経済学や生物学で出てくる微分方程式ですよ。これが終わったらもう少し数学的にちゃんとした話をしましょう。まずは微分方程式の射程距離の長さを知ってほしいからです。もっとちゃんと数学の説明してほしいというあなた、もうちょっと我慢してください。

今回もアンケートがあるのでぜひ回答をお願いします。

- <https://goo.gl/forms/1a70msfetjJcGvfB3>

ではまた次回をお楽しみに!