3　経済や生物で使う微分方程式

あなたが高校生以上なら社会の授業で次のような言葉を聞いたことがあるかもしれません.

> 人口は制限されなければ幾何級数的に増加するが生活資源は算術級数的にしか増加しないので生活資源は必ず不足する.

これは有名なマルサスの『人口論』で議論された話です. 幾何級数はいわゆる等比数列の和で, 算術級数は等差数列の和です. マルサスは経済学者なので経済の話です. 経済の話でこういう数学ネタが出てくるわけですね.

ちなみに大学の経済学だと経済の話で微分積分が本当に出てきます. ときどき経済学部の入試で数学が受験科目に入っていることがあります. 実際に大学に入ってから使うからです. それも高校の理系のレベルを越えた数学です. 統計データをいろいろいじらないといけないので統計学が必要で, そっちでも割といろいろ数学が必要です.

話を元に戻しましょう. マルサスの人口論に合わせて人口の増え方を考えます. ここではもっと一般的に生物の集団だと思いましょう. まずは生物の種類が 1 種類だとして考えていきます. 生物っぽく人の数というよりも一般に個体数と呼ぶことにして, 時刻 t での個体数を $x(t)$ とします[*1]. 個体数の増加率を出生率の死亡率の差として定義します. 微分方程式的にいうとこれは $x'(t)/x(t)$ です. 増加率が一定値 α に等しいとすると $x'(t)/x(t) = \alpha$ だ

[*1] 本当は $x(t)$ は整数なんですがここではいったん実数だと思っておきます. この辺の処理は物理や化学でもよく出てきます. 実はこの近似というか合理化もきちんとやっておかないといけません. ここではとてもやりきれませんけど. 本当は時間についてもいろいろ議論があります.

から次の微分方程式が出てきます.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t). \tag{3.1}$$

この微分方程式をマルサスモデルと言います. これを解くと $x(t) = x(0)e^{\alpha t}$ です. これで指数関数が出てきました. 等比数列は一般項が $a_n = 2^n$ のように指数関数で書けている数列だから, これを足し上げていけばまさに幾何級数になりますね. 放射性物質の崩壊とは指数の肩の符号が変わっているだけで, それ以外は同じ式です. 放射性物質の崩壊と生物の個体数の変化を追う方程式が同じ形をしているわけです.

シミュレーションの結果は放射性物質の崩壊のときと基本的に同じです. いちおうきちんとやっておきましょうか. まず微分方程式を次のように近似します.

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \alpha x_n, \quad x_{n+1} = \alpha x_n + h x_n. \tag{3.2}$$

これにしたがって解いてみましょう. 結果は次のページを見てください.

- `http://tinyurl.com/jhudbyc`

もう少し現実的な設定にしてみます. 個体数 $x(t)$ が大きくなると食物が足りなかったり衛生状態の悪化で病気にかかりやすくなったりして増加率が減る可能性があります. そこで増加率 α を $\alpha - \beta x$ $(\alpha, \beta > 0)$ に変えてみます.

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha - \beta x)\, x. \tag{3.3}$$

これにはロジスティック方程式という名前がついています．悪化を βx と書くことに必然性はありません．とりあえずやってみただけです．

解き方はさておき解は次のようになります．あなたがもしこの関数を微分できるなら計算してみてください．

$$x(t) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{1 + e^{-\alpha t}}. \tag{3.4}$$

これを近似すると次のようになります．

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = (\alpha - \beta x_n)\, x_n, \quad x_{n+1} = x_n + h\, (\alpha - \beta x_n)\, x_n. \tag{3.5}$$

これも厳密解と比較しながら計算してみます．

- `http://tinyurl.com/jhudbyc`

これもよく近似できていることは認めてもらえるんじゃないでしょうか? でもうるさい人は「近似の精度はどう決めるの?」みたいなことを考えているはずです．もちろんいたって真っ当な指摘です．あとで少し考えることにしてここではこのまま進みます．

あなたは「こんなのまだまだいい加減なんじゃないか?」「もっと現実的なことを考える必要があるんじゃないか?」と思っているかもしれません．もちろんそれも正しいです．

例えばマルサスモデルのレベルで右辺が気になります．実際には成長しないと子作りできないですからね．その影響も考えないといけません．生物で考えるなら食物連鎖があるわけで食べられて個体数が減ることだってあります．天敵が増えたらその個体の数はあおりを受けて激減するはずです．

もちろんこんなことは折り込み済みで, 例えば遅延型微分方程式, ロトカ-ボルテラ方程式と呼ばれる方程式が対応しています．これを調べるのも面白いんですが, 今回はこのくらいにしておきましょう．

簡単にまとめると, 今回は近似の精度が気になるあなたのために, 実際どのくらいよく本当の解を近似できているのかを調べました．経済学や生物のようにあんまり数学との関係がなさそうな分野と数学の関係も紹介しています．

長くなってきましたが最後にちょっと大事な話．式 (3.2) で $\alpha = 1$, $h = 1$ とすると $x_{n+1} = 2x_n$ になります．この漸化式は高校でも出てくるやつで, もちろん公比 2 の等比数列の漸化式です．底が 2 か e かの違いはあっても指数関数で書けることは同じです．これはたまたまではなくて数学的に意味があることです．

$x_{n+1} - x_n$ のように数列の隣の項の差を差分と言うことがあります．もちろん微分との関係を強く意識した言葉です．数列の問題, もっと言えば漸化式の問題は微分方程式とも深い関係があります[*2]．あまり深入りはしませんが数学や物理に興味があるなら覚えておくといろいろ楽しいことがあります．

今回もアンケートがあります．改善に繋げたいのでぜひ積極的に回答をお願いします．

[*2] もっと広く力学系と呼ばれる分野にまで広がります．力学系まで行くととんでもなく難しくなるのでとてもここで紹介はできません．でも幾何学とも関係してきたり整数論とも関係してきたり, 射程範囲は広いです．

- https://goo.gl/forms/SVa4aNyaq0etTzYx2

ではまた次回をお楽しみに!