1.7 数列とは何か? 微分方程式のシミュレーションの観点から

1.7.1 数列も関数

ベクトル, 関数と来て今回は数列です. 簡単に復習すると, 関数は数と数の割り当てルールのことで, 数列も関数なのでした.

数列も関数だ, となると, 数と数をどう割り当てるのかというルール指定が必要です. そのルールという視点に注目した話をしていきます.

1.7.2 等比数列

いろんな数列があります. 高校でもいろいろやります. 今回の話で 1 番大事な等比数列です. 長々とやっても仕方ないので軽く復習しときましょう.

(x_n) を数列とします. 高校だと $\{x_n\}$ と中括弧で書くと思いますが大学の数学的な都合で小括弧で書くことにします. 等比数列がどんな数列だったか, つまりどんなルールで与えられているのかというとこんなルールです:

$$x_{n+1} = \alpha x_n. \tag{1.7.1}$$

x_n が 0 のときでも成り立つ形で書きました. x_n が 0 ではないならもちろん $x_{n+1}/x_n = \alpha$ と書けます. どんな n に対しても比が一定な数列だから等比数列というのでした.

1.7.3 等比数列の一般項

このルールを使って一般項を出します. $x_{n+1} = \alpha x_n$ で, $x_n = \alpha x_{n-1}$ で, $x_{n-1} = \alpha x_{n-2}$ で, と延々続きます. これが終わるのは $x_1 = \alpha x_0$ です. 順々に代入していくと $x_n = x_0 \alpha^n$ になりますね.

この計算, はまる人ははまります. 実際私も高校の頃, 時々わけがわからなくなることがありました. 試験中に慌ててパニクったことを思い出します.

それはそれとして, ここで細々とした計算を詳しく解説してると本筋を見失うので省略します. 数列をどんなところでどう使うのか, それをちゃんと見てからきちんとやった方がよさそうですしね.

1.7.4 微分方程式と等比数列

これがどこで出てきたかというと微分方程式を近似した方程式で出てきたのでした. 放射性物質の崩壊で出てきたのはこんなやつです.

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = -x_n. \tag{1.7.2}$$

これを整理すると $x_{n+1} = (1-h)x_n$ で, $1-h=\alpha$ とすればまさにさっき書いた等比数列ですね. 関数を決めるルールとしての微分方程式というイメージはここから作ってみてください.

またさっき書いたように等比数列は指数関数で書けます. で, 元の微分方程式の解も実は指数関数で書けます.

1.7.5 もう一度: 数列も関数

ちょっと先走ったことも書きました. 何はともあれ, 数列は関数で, 関数は数と数の割り当てルールのことで, その割り当てルールとして等比数列っていう割り当て方があるんだ, ということです. 微分方程式もその割り当てルールと見なせるっていうのが今書いたことです. 微分方程式と揃えた言い方として上の式は差分方程式と言うこともあります.

1.7.6　漸化式

ちなみに上で紹介した割り当てルールはもっと一般的にできます．これ, 要は次の項をその前の項で決まると言っているだけなので, $a_{n+1} = a_n^2$ みたいにしてもいいし, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ みたいに 2 つ前と関係あるようにしてもいいです．この一般的なやつがいわゆる漸化式です.

1.7.7　2 つの数列に対する漸化式

もちろんこれ以外にもいろいろな漸化式があります．あとで使うのでもう 1 つ漸化式を紹介します．そのために 2 つの数列 (x_n), (v_n) を用意します. で, 次のような漸化式を考えます.

$$x_{n+1} - x_n = v_n, \quad v_{n+1} - v_n = -\alpha^2 x_n. \tag{1.7.3}$$

2 つの数列が絡まりあう漸化式です．高校でやる言葉を使うなら, 互いに階差数列を取ってると思ってもいいかもしれません.

1.7.8　単振動の漸化式

これがどこから出てくるかというと次の微分方程式からです.

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\alpha^2 x(t). \tag{1.7.4}$$

この微分方程式も物理でよく出てくる方程式で, いわゆる単振動の運動方程式です．さっきの漸化式を出すには $v(t) = x'(t)$ としてもとの方程式も $v' = -\alpha^2 x$ とすればいいです．これを差分近似すると次の式が出てきます.

$$x_{n+1} = x_n + hv_n, \quad v_{n+1} = v_n - h\alpha^2 x_n. \tag{1.7.5}$$

h が入っていて係数が微妙に違いますが, あまり気にしないでください.

この辺の計算プログラムも準備してあります. この記事後半のプログラムパートを確認してください.

1.7.9 アンケートの回答をお願いします

今回もアンケートがあります. 改善につなげるためぜひ回答をお願いします.

- `https://goo.gl/forms/gJSiOBd9vUa9D0Xr2`

ではまた次回をお楽しみに!

1.7.10 プログラミングパート

別ファイル参照!