

1.8 漸化式から微分へ 微分方程式のシミュレーションの観点から

1.8.1 漸化式はルールの 1 つ

前回数列の説明をしました。関数は数と数の対応ルールのことで、数列は関数の特別な形、つまり自然数と実数の対応ルールのことでした。

で、漸化式。漸化式は数列のルールの作り方の 1 つなのでした。ここから微分方程式から見た微分の発想につながっていきます。

1.8.2 数列 (a_n) の添字 n の意味

この添字、普段は数列の n 番目としか言っていないですね。もっと積極的な意味をつけましょう。それは n 分後とか n ステップ後とか時間的な意味です。2 つめの n ステップがわかりづらいでしょう。それはあとで説明します。

1.8.3 小学校を思い出す

小学校の頃こんな問題があったのを覚えているでしょうか？

A さんは毎分 75 m の速さで歩いて家を出ました。A さんは 5 分後に何 m 先にいるでしょうか？

こんなのは $5 \times 75 = 375$ で一発です。これを数列のスタンスで解いてみましょう。

A さんの n 分後の家からの距離を a_n と書くことにします。まず $a_0 = 0$ ですね。毎分 75 m の速さで進むので 1 分後の家からの距離 a_1 は $a_1 = a_0 + 75 = 75$ です。2 分後の距離 a_2 は 1 分後の距離から 75 m 追加です。式で書けばもちろん $a_2 = a_1 + 75 = 150$ ですね。

これをくり返せば $n + 1$ 分後の家から距離 a_{n+1} は $a_{n+1} = a_n + 75$ です。1 分前にどこにいたかわかれば次にどこにいるかわかります。いま毎分 75 m と言ったから n 分後とただで、これが毎時 75 m だったら n 時間後を考えたいし、毎秒 75 m だったら n 秒後を考えたいですね？

いちいち状況に合わせて n の呼び名を変えるの面倒ですから、 n は時間というよりこの適当な**単位**のことだと思いたいです。それを言葉ではっきりさせるために a_n を **n ステップ**目と呼びましょう。

あなたは当たり前のことを言っているだけだと思ったかもしれません。**その通りです**。そしてこの当たり前を過激に推し進めると微分に近づいていきます。

1.8.4 参考: 高校の力学

高校の力学の基本は等加速度運動です。つまりある時刻を基準にしてその n ステップ後の速さを v_n としましょう。速度が 1 ステップごとに α だけ増えるのなら、等加速度運動は $v_{n+1} = v_n + \alpha$ で決まる漸化式で書けます。実際には 1 ステップとかケチくさいこと言わないで一気に次のように書きます。

基準時刻から任意の時刻 t が経過したあとの速さは $v(t) = v_0 + \alpha t$ 。
ここで v_0 は初期速度である。

漸化式を解くと $v_n = v_0 + \alpha n$ なので、形式的に n を t に変えればいいだけです。でもいきなり上みたいに書かれて**物理全然わからん!**と思ったりしませんでした？ やってること、小学校の頃と何も変わりませんよ？

1.8.5 もっとふつうの状況

ふつうは**適当に平均を取ると毎分 75 m**なのであって、ずっと同じペースで動いているわけではないですね。漸化式で言うと $v_{n+1} = v_n + \alpha$ みたいな

が成り立ちません。 α がステップごとに変わるわけで。

どこにどう責任を押しつけるかは難しいところです。 いちばんシンプルなのは上に書いたように α を n の関数だということですね。 つまり $v_{n+1} = v_n + \alpha_n$ と α を定数から関数 (数列) にしてしまいます。

面倒なのでもう考える問題は A さんが場所 B から場所 C に移動する状況にしましょう。 そして α_n の部分をなるべくシンプルにしたいです。 実はここで**究極的な理想形**を考えると微分が出てきます。 とてもシンプルです。 ただもう少し現実の泥くさいところ・面倒くさいところを考えていきます。

1.8.6 等差数列にはできない

何をどうがんばっても $\alpha_n = \alpha$ にすることだけはできません。 逆にもしうできてしまったとすると全ての運動が等加速度運動にしかならないからです。 残念ながらそんな世界には生きていません。

1.8.7 じゃあどうするか?

とにかく α_n が曲者です。 これを何とかしたい。 もちろん一般的にはどうにもなりません。 でも特殊な状況なら何とかなるかもしれません。 数列と漸化式を基本に考えていても苦しいので、いったんそこから抜けることにしましょう。

最初に漸化式は微分方程式を近似して出てくることを見ましたね? このミニ講座では微分方程式が本体です。 何の指針もなく五里霧中を彷徨うよりも、大事な微分方程式と関係した漸化式を考える方が手が打ちやすいです。 というわけで数列のレベルでぐちゃぐちゃ考えるのはこの辺にして、もう微分に行ってしまいましょう。

今回はこの辺で終わりにします。 お疲れ様でした。

1.8.8 アンケートをお願いします

今回もアンケートがあります。改善に役立てたいのでぜひご協力をお願いします。

- <https://goo.gl/forms/DOZGnM7RADXoBJYH3>

ではまた次回をお楽しみに!