

2.1 はじめに: 全体の大枠を掴もう

[Link to Table of Contents](#)

目次

2.1.1	コミュニティ案内	352
2.1.2	講座の目的: 微分方程式のシミュレーション	353
2.1.3	微分方程式って何?	353
2.1.4	微分方程式は何に使うの?	354
2.1.5	シミュレーションの実際	355
2.1.6	今回のポイント	357
2.1.7	アンケートをお願いします.	357

2.1.1 コミュニティ案内

チャットワークというサービスを使って, 無料のオンラインコミュニティを作っています. 特に数学や物理の勉強に関して, オンラインで交流ができる場として試験的に運用しています.

- 数学・物理マニアックス
- 数学・物理駆け込み寺

前者の「数学・物理マニアックス」は主に大学以上のレベルの内容に関するコミュニティです. 後者の「数学・物理駆け込み寺」は主に中高レベルの内容に関するコミュニティです. 両方に入ってもらっても構いません.

参加資格などは特にありません. 参加者同士の常識的な配慮をお願いします. 全てにお答えすることは保証できませんが, 議論や質問などは自由にしてください.

また、次のページでは私が提供しているコンテンツ・サービスや、特に通信講座の一覧をまとめています。

- サービス一覧
- 通信講座一覧では

必要に応じて眺めてみてください。

2.1.2 講座の目的: 微分方程式のシミュレーション

今回はイントロとして説明することがいくつかあります。私がつけている他の講座と同じように、この中高数学駆け込み寺では細かいことを詳しくやるのではなく、数学を勉強するモチベーションになるように**数学の大きな姿をお見せしていきます**。で、実際に何をするのかというと、**微分方程式のシミュレーション**を通じて中高数学の大枠を掴んでいきます。もっと具体的には微分方程式のシミュレーションには中高でやるほとんどの数学が全て出てきます。

- **この数学はこんなところでこういう風に使うのか!**

使われているシーンを具体的に見てもらってモチベーションにしておもう、そんな講座です。この講座では**文字計算には慣れている**ことを前提にしています。

2.1.3 微分方程式って何?

- **微分方程式はどこでどんな風に使われているの?**
- **この講座では具体的にどんなことをするの?**

あなたが中高生なら微分は聞いたこともないかもしれません。あなたが中高の数学の復習をしたいと思っている大人なら、「自分にはまだ微分なんて早いんじゃない?」と思っているかもしれません。メインの微分方程式が何だかわ

からないんじゃない読み進めるのはきついですよね？というわけでまずは微分方程式の説明をします。

微分方程式は理工系の基礎です。いわゆる自然法則は微分方程式で表現されることが多いのです。これがどこで使われるかという、例えば洪水が起きたときの被害予測に使われます。どんな規模で起きた洪水が市街地のどこまで進入してくるか、そんなシミュレーションをテレビなどで見たことがないでしょうか？このシミュレーションに使われているのが微分方程式です。

2.1.4 微分方程式は何に使うの？

他にも微分方程式はありとあらゆるところで使われています。ゲームのCGを自然に見せるためにはまさに自然法則に則って風や水の動きを表現しないといけません。だから微分方程式がその背後に隠れています。天気予報はいまの気象条件から未来の様子を予測する必要があります。この予測にも微分方程式を使っています。機械を動かしていると熱くなることがありますね？あまりにも熱くなりすぎると機械が暴走してしまうので熱を効率よく逃がす必要があります。そのためには熱の流れを考えてその流体の動きをきちんと制御する必要があります。ここでは熱の流れの微分方程式を考えてそれをシミュレーションします。車を作るとき空気抵抗を調べるためにも流体力学が必要なので、シミュレーションはモノづくりにも活かされています。他にもいちいち挙げきれないくらい、身の回りに微分方程式のシミュレーションを使っているモノがあります。

微分方程式自体をきちんと調べようと思うと大学の数学が必要です。しかしシミュレーションを中心に考えれば中高の数学でかなりいろいろなことがわかります。わかるだけでなく実際に微分方程式を解いて遊んでみることでできます。この自分でも遊べるところまで持っていけるのが大事じゃないかと思っていて、それが微分方程式のシミュレーションをテーマに選んだ理由の1つです。

さて、ここまでで微分方程式が何で大事かはわかってもらえたでしょうか？

これをやれば数学をいろいろ遊び倒せそうと思ってもらえたら嬉しいです。ちゃんとがんばれば自分でゲームを作ったりもできますしね。次はもう少し数学的な内容に踏み込みましょう。

何はともあれ微分に関する話をやるわけです。そして微分は高校でやる内容です。あなたは微分に対して嫌な思い出を持っているかもしれません。あなたは「中学レベルからやり直したいのにそんなの無理だ!」と思っているかもしれません。もっと簡単なところからやってほしいと思っているかもしれません。

でもこの講座では中高数学の大枠を掴んでもらう講座です。そして今回はこの講座の大枠を掴んでもらう講座です。どうかもうしばらく辛抱して読み進めてください。

2.1.5 シミュレーションの実際

まず何をするのかを見てもらいたいので、次のページを開いて1番下までスクロールしてください。動画の再生ボタンがありますから動画を再生してみましょう。

- <http://tinyurl.com/zkljj9h>

これは1次元移流方程式のシミュレーション結果です。プログラムを書いてコンピュータに計算させ、その結果をアニメーションさせています。移流方程式は微分方程式なのでそこで微分を使っています。

コンピュータは数学的に厳密に微分を計算できません。極限が取れないからです。そうかといって全く何もできないわけでもありません。実は微分の定義にしたがって微分を**近似**して計算しています。微分を近似すると実はただの引き算(と割り算)になります。

さっきのページの上の方、式(2)-(4)を見てください。こっちにも同じ式を書いておきますね。

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}. \quad (2.1.1)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (2.1.2)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n). \quad (2.1.3)$$

最初の式が微分の近似式です。そのあと添字がごちゃごちゃ多い文字計算ではありますが、やっているのは[加減乗除の四則演算](#)だけです。特に上のページの(4)にあたる式(2.1.3)に注目してください。実はこの式にしたがって計算した結果をアニメーションでお見せしたのがさっきの動画です。

細かいことは追々やっていくとして何をしているか大雑把にいうと、[ベクトルなり数列なりの計算](#)です。また式(2.1.3)を見てください。右上にある添字 n に注目すれば左辺は $n+1$ で右辺は n です。これは数列の漸化式とも思えますね？

微分と同じく数列も高校でやる内容です。あなたが中学生ならちんぷんかんぷんでしょう。まずは少なくとも高校でやることがモノづくりの現場をはじめとしていろいろなところで出てくること、役に立っていることを知ってもらえれば OK です。その成果は身の回りにもたくさんありますからね。ちなみに移流方程式は事例紹介でちょっと出てきた流体力学で出てくる微分方程式です。

中学の数学という話なら、[文字式の計算がゴリゴリ出てきている](#)ことを注意した方がいいでしょうか？文字式できないとこの計算全く追えないですからね。今回そこまで深入りはできないものの、もっと難しいことをやろうと思うと[連立1次方程式](#)も出てきます。細かいことを言い出すときりがないから、今回はこのくらいにしておきましょう。

2.1.6 今回のポイント

- 微分方程式のシミュレーションをやっていく.
- シミュレーションは実社会でいろいろな応用がある
- 微分といっても近似を使うから結局は加減乗除になる.
- シミュレーションでは文字式の計算、ベクトル、数列など中高の数学をバリバリ使っている.

今回くらいのレベルでもベクトルで言うと **100 次元ベクトル**とかそういうレベルの計算が必要です. **手計算ではやってられない**のでプログラムを書いて計算して、さらにプログラムを書いて図にしたりアニメーションにしたりしています.

あなたはプログラミングに興味があるかもしれません. しかし**プログラミングの詳しい話は別の機会に回します**. 講座のボリュームが大きくなりすぎるからです. まずは数学に集中しましょう.

今回お見せしたのは変数が2つある偏微分方程式でちょっと難しいです. 変数が2つあるとややこしいので次回以降は、変数が1つしかない**常微分方程式**を見ていきます.

今回はここで終わりです. お疲れさまでした.

2.1.7 アンケートをお願いします.

最後にアンケートをお願いしています. 改善に繋がっていきたくないのでぜひコメントをお願いします.

- <https://goo.gl/forms/uQikzCF209GiCCw92>

ではまた次回をお楽しみに!

参考文献

- [1] 明出伊類似, 尾畑伸明. 『量子確率論の基礎』. 牧野書店, 9 2003.
- [2] L. V. Ahlfors, 乾吉笠原. 『複素解析』. 現代数学社, 3 1982.
- [3] M. Aigner and G. Ziegler. 『天書の証明』. 丸善出版, 9 2012.
- [4] 秋月康夫. 『軌近代数学の展望』. 筑摩書房, 12 2009.
- [5] C. Albert, L. Ferrari, J. Fröhlich, and B. Schlein. Magnetism and the weiss exchange field- a theoretical analysis motivated by recent experiments. *J. Stat. Phys.*, Vol. 125, pp. 77–124, 10 2006.
- [6] Allen Altman and Steven Kleiman. *A Term of Commutative Algebra*. Worldwide center of mathematics, 4 2013.
- [7] 安藤哲哉. 『不等式 21 世紀の代数的不等式論』. 数学書房, 9 2012.
- [8] 青柳碧人. 『浜村渚の計算ノート』. 講談社, 6 2011.
- [9] Asao Arai. Infinite dimensional analysis and analytic number theory. *Acta Applicandae Mathematica*, Vol. 63, pp. 41–78, 9 2000.
- [10] 新井朝雄, 江沢洋. 『場の量子論と統計力学』. 日本評論社, 6 1988.
- [11] 新井朝雄, 江沢洋. 『量子力学の数学的構造 II』. 朝倉書店, 7 1999.
- [12] 新井朝雄, 江沢洋. 『量子力学の数学的構造 I』. 朝倉書店, 7 1999.
- [13] 新井朝雄. 『フォック空間と量子場 下』. 数理物理シリーズ. 日本評論社, 8 2000.
- [14] 新井朝雄. 『フォック空間と量子場 上』. 数理物理シリーズ. 日本評論社, 8 2000.

- [15] 新井朝雄. 『量子現象の数理』. 朝倉物理学体系. 朝倉書店, 2 2006.
- [16] 新井朝雄. 『物理の中の対称性-現代数理物理学の観点から』. 日本評論社, 1 2008.
- [17] 新井朝雄. 『量子統計力学の数理』. 共立出版, 7 2008.
- [18] 新井朝雄. 『量子数理物理学における汎関数積分法』. 共立出版, 8 2010.
- [19] 新井朝雄. 『ヒルベルト空間と量子力学 改訂増補版』. 共立出版, 7 2014.
- [20] H. Araki and E. J. Woods. Representations of the canonical commutation relations describing a nonrelativistic infinite free bose gas. *J. Math. Phys.*, Vol. 4, pp. 637–662, 1963.
- [21] 荒木不二洋. 『量子場の数理』, 岩波講座 現代の物理学. 岩波書店, 1 1993.
- [22] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, 9 1997.
- [23] Neil Ashcroft and David Mermin. *Solid State Physics*. Thomson Learning, 1976.
- [24] M. Atiyah and I. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Westview Press, 2 1994.
- [25] T. Aubin. *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations*. Springer New York, 12 1982.
- [26] Thierry Aubin. *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*. Springer, 6 1998.
- [27] Steve Awodey. *Category Theory*. Oxford Univ Pr, 8 2010.
- [28] Simon B. *Functional Integration And Quantum Physics*. Chelsea Pub Co., 12 2004.
- [29] H. Baumgartel. *Operator Algebraic Methods in Quantum Field Theory*. Vch Pub, 10 1995.
- [30] B. Blackadar. *K-Theory for Operator Algebras*. Cambridge University

Press, 9 1998.

- [31] J. Bost and A. Connes. Hecke algebras, type iii factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory. *Selecta Math*, Vol. 1, No. 3, pp. 411–457, 1995.
- [32] O. Bratteli and D. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Vol. 1 of *Theoretical and Mathematical Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 11 2010.
- [33] O. Bratteli and D. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Vol. 2 of *Theoretical and Mathematical Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 7 2013.
- [34] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 11 2011.
- [35] H. Brezis, 宏藤田, 芳雄小西. 『関数解析-その理論と応用に向けて』 . 産業図書, 10 1988.
- [36] D. Buchholz and H. Grundling. Quantum systems and resolvent algebras. *arXiv:13060860*, pp. 1–15, 6 2013.
- [37] Sebastiano Carpi, Robin Hillier, Yasuyuki Kawahigashi, and Roberto Longo. Spectral triples and the super-virasoro algebra. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 295, pp. 71–97, 2010.
- [38] Sebastiano Carpi, Yasuyuki Kawahigashi, Roberto Longo, and Mihaly Weiner. From vertex operator algebras to conformal nets and back. *Mem. Amer. Math. Soc.*, Vol. to appear, pp. 1–46, 2015.
- [39] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton University Press, 11 1999.
- [40] S C Coutinho. *A Primer of Algebraic D-Modules*. Cambridge University Press, 5 1995.
- [41] David A. Cox, John Little, and Donal O’shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Springer, 11 2010.

- [42] Michael G. Crandall, Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 27, pp. 1–67, 1992.
- [43] Huybrechts Daniel. *Complex Geometry: An Introduction*. Springer, 8 2004.
- [44] Bernard d'Epagnat. *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*. Addison Wesley Longman, 9 1976.
- [45] Jared Diamond. 『銃・病原菌・鉄(上) 1万3000年にわたる人類史の謎』. 草思社, 2 2012.
- [46] Diamond Jared. 『銃・病原菌・鉄(下) 1万3000年にわたる人類史の謎』. 草思社, 2 2012.
- [47] Paul Dirac. *Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 2 1982.
- [48] Paul M. Dirac, 洋江沢. 『一般相対性理論』. 筑摩書房, 12 2005.
- [49] W. Dunham, 重雄一樂, 敏實川. 『微積分名作ギャラリー—ニュートンからルベークまで』. 日本評論社, 11 2009.
- [50] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 4 2010.
- [51] 江沢洋. 『だれが原子をみたか』. 岩波書店, 1 2013.
- [52] Otto Forster. *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer, 10 2013.
- [53] 藤原正彦. 『天才の栄光と挫折—数学者列伝』. 文藝春秋, 9 2008.
- [54] 深谷賢治. 『数学者の視点』. 岩波書店, 1 1996.
- [55] 深谷賢治. 『解析力学と微分形式』. 岩波書店, 4 2004.
- [56] 深谷賢治. 『電磁場とベクトル解析』. 岩波書店, 1 2004.
- [57] 舟木直久. 『確率論』. 朝倉書店, 11 2004.
- [58] B. Gelbaum and J. Olmsted. *Counterexamples in Analysis*. Dover, 6 2003.
- [59] Howard Georgi. 『物理学におけるリー代数 アイソスピンから統一理論へ』. 吉岡書店, 10 2010.

-
- [60] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 4 2013.
- [61] Rudolf Haag. *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. Springer, 1996.
- [62] 芳賀和夫. 『オリガミクス 幾何図形折り紙』, 第 1 巻. 日本評論社, 10 1999.
- [63] 田崎晴明, 原隆. 『相転移と臨界現象の数理』. 共立出版, 6 2015.
- [64] G. Hardy and J. Littlewood. 『不等式』. シュプリンガーフェアラーク 東京, 8 2012.
- [65] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer, 4 1997.
- [66] 長谷川浩司. 『線型代数』. 日本評論社, 3 2015.
- [67] 服部哲弥. 『Amazon ランキングの謎を解く 確率的な順位付けが教える売上の構造』. 化学同人, 5 2011.
- [68] Lars Hörmander. A history of existence theorems for the cauchy-riemann complex in l^2 spaces. *Journal of Geometric Analysis*, Vol. 13, No. 2, pp. 329–357, 2 2003.
- [69] 日合文雄, 柳研二郎. 『ヒルベルト空間と線型作用素』. 牧野書店, 7 1995.
- [70] 平井武. 『線形代数と群の表現 I』. 朝倉書店, 11 2001.
- [71] 平井武. 『線形代数と群の表現 II』. 朝倉書店, 11 2001.
- [72] 堀畑和弘, 長谷川浩司. 『常微分方程式の新しい教科書』. 朝倉書店, 2016.
- [73] 堀田良之. 『加群十話一代数学入門』. 朝倉書店, 10 1988.
- [74] 一樂重雄. 『集合と位相 そのまま使える答えの書き方』. 講談社サイエンティフィク, 4 2001.
- [75] 伊原康隆. 『志学数学 研究の諸段階 発表の工夫』. 丸善出版, 7 2012.
- [76] 伊藤清三. 『ルベーク積分入門』. 裳華房, 4 1963.
- [77] 岩永恭雄, 佐藤眞久. 『環と加群のホモロジー代数的理論』. 日本評論社, 10 2002.

- [78] Max Jammer. *The Philosophy of Quantum Mechanics: The Interpretations of Quantum Mechanics in Historical Perspective*. Wiley, 12 1974.
- [79] Jürgen Jost. *Postmodern Analysis*. Springer, 8 2005.
- [80] M. Kac, 陽一郎高橋, 眞澄中嶋. 『Kac 統計的独立性』. 数学書房, 4 2011.
- [81] Mark Kac. Can one hear the shape of a drum? *American Mathematical Monthly*, Vol. 73, pp. 1–23, 1966.
- [82] 嘉田勝. 『論理と集合から始める数学の基礎』. 日本評論社, 12 2008.
- [83] R. Kadison and J. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*. American Mathematical Society, 7 1997.
- [84] R. Kadison and J. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras: Advanced Theory*. American Mathematical Society, 7 1997.
- [85] 金谷健一. 『これなら分かる応用数学教室-最小二乗法からウェーブレットまで』. 共立出版, 6 2003.
- [86] 唐木田健一. 『原論文で学ぶアインシュタインの相対性理論』. ちくま学芸文庫, 4 2012.
- [87] 加藤五郎. 『コホモロジーのころ』. 岩波書店, 3 2003.
- [88] 桂利行. 『代数幾何入門』. 共立出版, 10 1998.
- [89] 桂利行. 『代数学 I 群と環』. 東京大学出版会, 3 2004.
- [90] 桂利行. 『代数学 III 体とガロア理論』. 東京大学出版会, 9 2005.
- [91] 桂利行. 『代数学 II 環上の加群』. 東京大学出版会, 3 2007.
- [92] Victor J. Katz. 『カットツ 数学の歴史』. 共立出版, 7 2005.
- [93] 河合隆裕, 竹井義次. 『特異摂動の代数解析学』. 岩波書店, 5 2008.
- [94] 川村みゆき. 『多面体の折紙 正多面体・準正多面体およびその双対』. 日本評論社, 11 1995.
- [95] 川添愛. 『白と黒のとびら オートマトンと形式言語をめぐる冒険』. 東京大学出版会, 4 2013.
- [96] 圏論の歩き方委員会. 『圏論の歩き方』. 日本評論社, 9 2015.
- [97] 金成煥, 山本昌宏. 『熱方程式で学ぶ逆問題 Fourier 解析 関数解析から

- 数値解析まで』．サイエンス社, 3 2008.
- [98] 木村達雄. 『佐藤幹夫の数学』．日本評論社, 9 2014.
- [99] Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley and Sons, 12 2004.
- [100] 小林昭七. 『顔をなくした数学者-数学つれづれ』．岩波書店, 7 2013.
- [101] 小林俊行, 大島利雄. 『リー群と表現論』．岩波書店, 4 2005.
- [102] 小平邦彦. 『新・数学の学び方』．岩波書店, 1 2015.
- [103] 小平邦彦. 『複素多様体論』．岩波書店, 1 2015.
- [104] 国立天文台. 『理科年表 平成 25 年版 机上版』．丸善出版, 11 2013.
- [105] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin. *Introductory Real Analysis*. Dover, 6 1975.
- [106] 小松彦三郎. 『佐藤超函数論入門』．数理解析研究所講究録, pp. 1–174, 10 1973.
- [107] ことりん. 『偏微分方程式のお話 解の存在について』．関西すうがく徒のつどい, pp. 1–25, 3 2012.
- [108] エリランダウ, リフシッツイエ. 『力学』．ランダウ=リフシッツ理論物理学教程. 東京図書, 4 1986.
- [109] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, 12 1998.
- [110] Amy Langville, Carl Meyer, 和生岩野, 利明黒川, 洋黒川. 『Google PageRank の数理-最強検索エンジンのランキング手法を求めて-』．共立出版, 10 2009.
- [111] J. Lörinczi, F. Hiroshima, and V. Betz. *Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space: With Applications to Rigorous Quantum Field Theory*. Walter De Gruyter, 6 2011.
- [112] E. H. Lieb and M. Loss. *Analysis*. Amer. Math. Soc., 4 2001.
- [113] E. H. Lieb and R. Seiringer. *The Stability of Matter in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 11 2009.
- [114] E. H. Lieb, R. Seiringer, J. Solovej, and J. Yngvason. *The Mathematics of*

- the Bose Gas and its Condensation (Oberwolfach Seminars)*. Birkhaeuser Basel, 7 2005.
- [115] E. H. Lieb and B. Simon. Thomas-fermi theory of atoms, molecules and solids. *Adv. in Math.*, Vol. 23, pp. 22–116, 1977.
- [116] 松本幸夫. 『多様体の基礎』. 岩波書店, 9 1988.
- [117] 松村英之. 『可換環論』. 共立出版, 9 2000.
- [118] 松坂和夫. 『集合・位相入門』. 岩波書店, 6 1968.
- [119] David Mermin. *Boojums all the Way Through | Communicating Science in a Prosaic Age*. Cambridge University Press, 1990.
- [120] John Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.
- [121] John Willard Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Princeton Univ Pr, 11 1997.
- [122] 三ツ矢和弘. 『やさしい理系数学』. 河合出版, 7 2013.
- [123] 森本光生. 『復刊 佐藤超函数入門』. 共立出版, 9 2000.
- [124] Mohammad Sal Moslehian. The counterexamples in functional analysis. *On the internet*, 2002.
- [125] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. CRC Press, 6 2003.
- [126] 中村徹. 『超準解析と物理学』. 日本評論社, 6 1998.
- [127] 夏目利一, 森吉仁志. 『作用素環と幾何学』. 数学メモワール, 6 2001.
- [128] 西川青季. 『幾何学的変分問題』. 岩波書店, 4 2006.
- [129] 登坂宣好, 大西和栄, 山本昌宏. 『逆問題の数理と解法-偏微分方程式の逆解析』. 東京大学出版会, 12 1999.
- [130] 野口潤次郎. 『多変数解析関数論 学部生へおくる岡の連接定理』. 朝倉書店, 4 2013.
- [131] 緒方芳子, 小澤登高. 『東大数理ビデオアーカイブス』, 12 2009.
- [132] 小川洋子. 『博士の愛した数式』. 新潮社, 11 2005.
- [133] 小嶋泉. 『量子場とミクロ・マクロ双対性』. 丸善出版, 7 2013.
- [134] 太田浩一. 『電磁気学 II』. 丸善出版, 10 2000.
- [135] 太田浩一. 『電磁気学 I』. 丸善出版, 10 2000.

-
- [136] 太田浩一. 『マクスウェル理論の基礎-相対論と電磁気学』. 東京大学出版会, 7 2002.
 - [137] 王城夕紀. 『青の数学』. 新潮社, 7 2016.
 - [138] Scott Pakin. The comprehensive latex symbol list. p. 331, 11 2015.
 - [139] Alberto Parmeggiani. *Spectral Theory of Non-Commutative Harmonic Oscillators: An Introduction*. Springer Berlin Heidelberg, 4 2010.
 - [140] A. Peres. *Quantum Theory—Concepts and Methods*. Fundamental Theories of Physics. Springer, 9 1995.
 - [141] Lev Pontryagin. 連続群論 上. 岩波書店, 10 1957.
 - [142] Lev Pontryagin. 連続群論 下. 岩波書店, 5 1958.
 - [143] Bott Raoul and Tu W. Loring. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer, 5 1995.
 - [144] M. Reed and B. Simon. *Functional Analysis*. Methods of Modern Mathematical Physics. Academic Press, 4 1981.
 - [145] 齋藤毅. 『集合と位相』. 東京大学出版会, 9 2009.
 - [146] 齋藤正彦. 『線型代数入門』. 東京大学出版会, 3 1966.
 - [147] 坂井秀隆. 『常微分方程式』. 東京大学出版会, 8 2015.
 - [148] 佐武一郎. 『線型代数学 (新装版)』. 裳華房, 6 2015.
 - [149] Mikio Sato. Theory of hyperfunctions i. *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo. Sect. 1, Mathematics, astronomy, physics, chemistry*, pp. 139–193, 8 1959.
 - [150] Mikio Sato. Theory of hyperfunctions ii. *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo. Sect. 1, Mathematics, astronomy, physics, chemistry*, pp. 387–437, 8 1960.
 - [151] 佐藤健太郎. 『炭素文明論 「元素の王者」が歴史を動かす』. 新潮社, 7 2013.
 - [152] Y. Sekine. Magnetism and infrared divergence in a hubbard-phonon interacting system. *arxiv:10082056*, pp. 1–9, 8 2010.
 - [153] 関根良紹. 『現代数学探険隊』. 相転移プロダクション, 2017.

- [154] Jean-Pierre Serre. Faisceaux algebriques coherents. *The Annals of Mathematics*, Vol. 61, pp. 197–278, 3 1955.
- [155] 志賀浩二. 『無限からの光芒-ポーランド学派の数学者たち』. 日本評論社, 4 1988.
- [156] 清水明. 『量子論の基礎-その本質のやさしい理解のために』. サイエンス社, 4 2004.
- [157] 清水明. 『熱力学の基礎』. 東京大学出版会, 3 2007.
- [158] シンサイモン. 『暗号解説 下』. 新潮社, 6 2007.
- [159] シンサイモン. 『暗号解説 上』. 新潮社, 6 2007.
- [160] Jan Philip Solovej. Book review: Stability of matter in quantum mechanics by eliott h. lieb and robert seiringer. *arXiv:11110170*, pp. 1–7, 11 2011.
- [161] 相転移 P. 『よくわからない数学 色々な反例で遊ぼう』, 10 2013.
- [162] 相転移 P. *Math textbook*. phasetr production, 2014.
- [163] 相転移 P. 『理工系新入生のための線型代数入門: 微分積分的観点から』, よくわからない数学. 相転移プロダクション, 7 2014.
- [164] 相転移 P. 『現代数学観光ツアー 物理のための関数解析探訪』. 相転移プロダクション, 8 2016.
- [165] 相転移 P. 『独学のすゝめ 大学受験勉強法あなたが大学受験で失敗・後悔しないために私はなぜあなたにいい大学・難関大に入ってほしいのか』. 相転移プロダクション, 6 2015.
- [166] 杉浦光夫. 『解析入門 I』. 東京大学出版会, 3 1980.
- [167] 砂川重信. 『理論電磁気学』. 紀伊國屋書店, 9 1999.
- [168] 数学のたのしみ編集部. 『数学まなびはじめ 第 1 集』. 日本評論社, 1 2006.
- [169] 数学のたのしみ編集部. 『数学まなびはじめ 第 2 集』. 日本評論社, 1 2006.
- [170] 数学のたのしみ編集部. 『数学まなびはじめ 第 3 集』. 日本評論社, 7 2015.

-
- [171] 数理科学編集部. 『物理の道しるべ-研究者の道とは何か』. サイエンス社, 5 2011.
- [172] Richard G. Swan. Vector bundles and projective modules. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 105, pp. 264–277, 1962.
- [173] George G. Szpiro. 『ケプラー予想』. 新潮社, 4 2005.
- [174] 高木貞治. 『定本 解析概論』. 岩波書店, 9 2010.
- [175] 高橋信. 『マンガでわかる統計学』. オーム社, 7 2004.
- [176] 高瀬幸一. 『群の表現論序説』. 岩波書店, 5 2013.
- [177] 高瀬正仁. 『岡潔—数学の詩人』. 岩波書店, 10 2008.
- [178] 高瀬正仁. 『無限解析のはじまり—わたしのオイラー』. 筑摩書房, 7 2009.
- [179] 高瀬正仁. 『ガウスの数論 わたしのガウス』. 筑摩書房, 3 2011.
- [180] 高瀬正仁. 『近代数学史の成立 解析篇 オイラーから岡潔まで』. 東京図書, 6 2014.
- [181] 高瀬正仁. 『微分積分学の史的展開 ライプニッツから高木貞治まで』. 講談社, 1 2015.
- [182] 高瀬正仁. 『微分積分学の誕生デカルト『幾何学』からオイラー『無限解析序説』まで』. SB クリエイティブ, 7 2015.
- [183] H. Tasaki. From nagaoka's ferromagnetism to flat-band ferromagnetism and beyond -an introduction to ferromagnetism in the hubbard model. *Progr. Theor. Phys.*, pp. 489–548, 1998.
- [184] 田崎晴明. 『数学:物理を学び楽しむために』. On the internet, 2013.
- [185] 田崎晴明. 『熱力学—現代的な視点から』. 培風館, 4 2000.
- [186] 田崎晴明. 『統計力学 I』. 培風館, 12 2008.
- [187] 田崎晴明. 『統計力学 II』. 培風館, 12 2008.
- [188] Gerald Teschl. *Mathematical Methods in Quantum Mechanics With Applications to Schrödinger Operators*. American Mathematical Society, 11 2014.
- [189] 東京大学工学部計数工学科数理情報工学コース. 『数理工学への誘

- い』．日本評論社, 9 2002.
- [190] 土基善文. 『 x の x 乗の話』．日本評論社, 7 2002.
- [191] 内村直之. 『古都がはぐくむ現代数学: 京大数理解析研につどう人びと』．日本評論社, 11 2013.
- [192] 植村信子. 『たかが数学, されど数学』．山形大学, 10 2005.
- [193] J. v. Neumann, 徹広重, 健井上, 敏彦恒藤. 『量子力学の数学的基礎』．みすず書房, 11 1957.
- [194] John von Neumann. 『ノイマン・コレクション 数理物理学の方法』．ちくま学芸文庫. 筑摩書房, 12 2013.
- [195] John von Neumann. 『ノイマン・コレクション 作用素環の数理』．ちくま学芸文庫. 筑摩書房, 1 2015.
- [196] Masato Wakayama. 『非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数』．数理解析研究所講究録, Vol. 1479, pp. 26–39, 2006.
- [197] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge University Press, 10 1995.
- [198] Hermann Weyl. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. Dover Publications, 6 1950.
- [199] Hermann Weyl. 『リーマン面』．岩波書店, 5 2003.
- [200] Hermann Weyl. 『空間・時間・物質 下』．ちくま学芸文庫. 筑摩書房, 4 2007.
- [201] Hermann Weyl. 『空間・時間・物質 上』．ちくま学芸文庫. 筑摩書房, 4 2007.
- [202] Hermann Weyl. 『古典群 不変式と表現』．シュプリンガー数学クラシックス. 丸善出版, 7 2012.
- [203] D. Williams, 次郎赤堀, 啓介原, 俊雄山田. 『マルチンゲールによる確率論』．培風館, 2 2004.
- [204] Pauli Wolfgang. *Theory of Relativity*. Dover Publications, 7 1981.
- [205] 山本義隆, 中村孔一. 『解析力学 I』．朝倉書店, 9 1998.
- [206] 山本義隆, 中村孔一. 『解析力学 II』．朝倉書店, 9 1998.

-
- [207] 山内恭彦, 杉浦光夫. 『連続群論入門』. 培風館, 8 2010.
- [208] 安田まさえ. 『数学女子 1』. 竹書房, 9 2010.
- [209] 保江邦夫. 『量子の道草-方程式のある風景』. 日本評論社, 1 2009.
- [210] 吉田武. 『素数夜曲 女王陛下の LISP』. 東海大学出版会, 6 2012.
- [211] L. C. Young. *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*. Saunders, Philadelphia, 5 1969.
- [212] 結城浩. 『数学ガール』. ソフトバンククリエイティブ, 6 2007.
- [213] 結城浩. 『数学ガールの秘密ノート/ベクトルの真実』. 数学ガールの秘密ノートシリーズ. SB クリエイティブ, 11 2015.
- [214] キースデブリン, ゲーリーローデン. 『数学で犯罪を解決する』. ダイヤモンド社, 4 2008.
- [215] エドワードフレンケル. 『数学の大統一に挑む』. 文藝春秋, 7 2015.
- [216] 数理科学編集部. 『数学の道しるべ-研究者の道とは何か』. サイエンス社, 5 2011.

索引

Bose-Einstein 凝縮, 944

Dobrushin-Lanford-Ruelle 条件, 938

Fourier 級数, 932

Fourier 変換, 932

infrared bound, 945

Ising 模型, 930

KMS 条件, 965

KMS 状態, 966

Peierls argument, 939

演算子, 953

オブザーバブル, 953, 958

回路理論, 943

確率論, 930

観測可能量, 953, 958

基底エネルギー, 960

基底状態, 960

群, 941

格子模型, 929

固体物理, 929

固有値, 960

固有ベクトル, 960

示量性, 932

自己共役作用素, 953, 958

自発的対称性の破れ, 940

自由エネルギー, 931

状態, 937, 953, 955, 957, 964

状態ベクトル, 953, 957

スピン系, 929

正則, 932

線型性, 937

線型代数, 929

相, 930

相転移, 930

統計力学, 930

トポロジー, 930

トレースクラス, 965

ドメインウォール, 941

熱力学関数, 932

熱力学的極限, 932, 961

Heisenberg 鎖, 957

Heisenberg 模型, 957

発散の困難, 943

場の量子論, 943

Pauli 行列, 957

Hilbert 空間, 953, 957

微分積分, 929

物理量, 953, 958

分配関数, 963

ベクトル状態, 938

ホモトピー, 930

無限系, 936, 961

有限系, 936