中学での多項式の因数分解の「採点」を巡る問題

数学和尚 ダイナマイト関根 *

2020 年 1 月 11 日

目次

1	はじめに	2
2	引用	2
2.1	はじめに	2
2.2	具体的なツイートへの指摘その 1	4
2.3	具体的なツイートへの指摘その 2	4
2.4	具体的なツイートへの指摘その 3	5
2.5	具体的なツイートへの指摘その 4	5
2.6	具体的なツイートへの指摘その 5	6
2.7	続き	6
2.8	質問への回答その 1	7
2.9	質問への回答その 2	7
2.10	質問への回答その 3	8

* phasetr@gmail.com

2.11 続き 8
2.12 質問への回答. 9
2.13 具体的なツイートへの指摘 10
2.14 質問への回答. 10

1 はじめに

次のツイートの引用です.

- 元ツイートへの URL

別途 PDF にまとめる前提での文章なので, 適当に編集しています. 正式なバージョンは上の URL からご覧ください.

2 引用

2.1 はじめに

私は「数学的に正確に考えればどうなるか」に関する議論を省略して,「どのように採点するべきか」の議論にしてしまうことは, 数学教育的に有害だと思います. 率直に言って不快なので注意した方が良いと思う. まずは教える側が十分に数学を理解していないとお話にならない.

- 引用されているツイート

  【ゆる募】中学 3 年生数学 「$x^2 - x$ を因数分解せよ」という問題で回答が $(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})$ は……

まず 0 でない整数 (負の整数も含む) の素因数分解について復習しましょう. 任意の 0 でない整数 n は各 i に関して p_i を素数として $n = \pm p_1 p_2 \cdots p_r$ の形で表され, 素数達 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ は並べる順序の違いを除いて n から一

意的に決まります.

以上では素数の定義の中に暗黙のうちに「0 より大きい」という条件を入れておきましたが, ± を除いた分 (正の素数) を「素数」と呼ぶこともあります. その場合には 0 でない整数 n の $n = \pm p_1 p_2 \cdots p_r$ という表示における p_i 達は並べる順序と ±1 倍の違いを除いて n から一意的に決まります.

0 でない整数の素因数分解の存在と一意性について以上のように詳しく復習し直した理由は, 例えば「-6 の素因数分解を求めよ」という問題では $-(2 \cdot 3), (-2)3, 2(-3), -(-2)(-3), -(3・2), (-3)2, 3(-2), -(-3)(-2)$ の 8 種類の分解が, 並べる順序と ±1 倍の違いを除いて, 同一の素因数分解であることを思い出すためです.

以上のような意味で, 素因数分解の存在と (無視するべき違いを除いた) 一意性の成立が「180 を素因数分解せよ」のような問題の基礎になっています. 他の場合も同様に考えることができます.

例えば, 有理数係数の 1 変数多項式環 $\mathbb{Q}[x]$ においても, 以上と同様のスタイルの素因数分解の存在と一意性が成立しています. ただし素因数分解の一意性は, 並べる順序と 0 でない有理数倍の違いを除いた一意性の意味であると考える必要がある. この場合には素因数分解を因数分解と言うこともある.

例えば $2x^2-2$ の $\mathbb{Q}[x]$ 内での因数分解 $2(x+1)(x-1)$, $-(-x+1)(2x+2)$, $(2/3)(3x-3)(x+1)$, $4((1/2)x+1/2)(x-1)$ などは はどれも本質的に同じ因数分解だとみなされます. 最低でもこのようなことを知っておかなければ, 中学生に数学を教えることは無理でしょう. ここが許容される最低レベル.

中学校での因数分解の採点では $2x^2-2$ の因数分解を $(2x+2)(x-1)$ と書くと, バツを付けられる場合もあるようです. そのようなバツを付ける人は, 中学生に数学を教えるために必要な最低レベルの数学の理解がない人だと推測されます. この点について我々は先生の側に厳しくあるべきだと思います.

$\mathbb{Q}[x]$ より難しい $\mathbb{Z}[x]$ や $\mathbb{Z}[x, y]$ などにおいても素因数分解の存在と一意性が成立しています. ただしそれらの場合には, 素因数分解の一意性を並べ

る順序と ± 1 倍の違いを除いた一意性だと解釈することになる．このように素因数分解の話も正確に説明するとかなり面倒になります．

$\mathbb{Q}[x]$ に $\sqrt{x}$ を付け加えてできる環 $\mathbb{Q}[\sqrt{x}]$ は単に $\mathbb{Q}[x]$ における x を $\sqrt{x}$ に置き換えてできる同型な環なので, $\mathbb{Q}[x]$ の場合と同様に $\mathbb{Q}[\sqrt{x}]$ においても素因数分解の存在と一意性が自明に成立しています．素因数分解の存在と一意性が成立するためには, x の多項式環である必要はありません．

2.2　具体的なツイートへの指摘その 1

このスレッドのトップの発言からのリンク先のスレッドを見ると,「$\sqrt{x}$ の $x < 0$ における扱い」を気にする次のような発言が見付かりますが, $\mathbb{Q}[\sqrt{x}]$ を考えるときにはそのようなことを気にする必要はありません．

- 引用元ツイート

  まずはこの式変形自体の正しさを検証すると,「少し足りない」ということになります．$\sqrt{x}$ の $x < 0$ における扱いに関しては例えば $\sqrt{-1}$ は ± 1 どちらにも取れます．$\sqrt{\ }$ という記号は実数に限り, 平方根のうち正の方をとるという定義であり, 複素数に関してはどちらをとるかを改めて断らなければなりません．

2.3　具体的なツイートへの指摘その 2

- 引用元ツイート

  $\times$ にしました．【中学生の】問題なので, 根号の中に負の数が入るのは御法度．x について問題文が何も言ってないなら, 当然 x が負の数である場合も含む．だから, 負の数かもしれない x を無造作に根号にぶち込んだこの式は,【中学生の】解答としては $\times$ である．問題文に

> 書いて無くても中学生は中学生

これも同様におかしなコメントです。 $\mathbb{Q}[\sqrt{x}]$ を考えるときには $\sqrt{x}^2 = x$ という関係式を形式的に考えれば十分であり, x に数を代入することを考える必要はありません. 他にも同類のコメントが見つかる.

2.4　具体的なツイートへの指摘その 3

- 引用元ツイート

> 多項式環での因数分解であることは文脈から明らかなのでバツ. 多項式環に $\sqrt{x}$ を加えた環での因数分解であることを明記してたらマル. 2 の因数分解として $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$ を出してきたときとかも同様.

$\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \left\{ a + b\sqrt{3} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ においても素因数分解の存在と一意性 (並べる順序と $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ における可逆元倍の違いを除いての一意性) が成立している. だから $\sqrt{3}$ を排除して当然だと考えるのは, わざわざ視野を狭くして数学をつまらなくする行為になります. 教える側が数学的に無知である危険性に配慮しながら, 数学的な理解を深める前に「中学生の答案の採点の仕方」の議論にしてしまうこと自体が極めて有害なのだと思います. 価値のある普遍的な考え方の重要性はそれによって排除され, おかしな議論が跋扈することになる.

2.5　具体的なツイートへの指摘その 4

- 引用元ツイート

> ありがとうございます
> ただ中学生でも, 分母に 0 はだめと知っているため『$1/x$ 』は私なら $\times$ にします (輪まで拡張の議論はなしとして) 今回のケースでは

> 「中学生が習う数の範囲ではこの因数分解は可能である」ため, 明確に $\times$ にできる根拠が見つかっていないため問いかけという形を取りました.

$\mathbb{Q}[x]$ に $\sqrt{x}$ を付け加えてできる $\mathbb{Q}[\sqrt{x}]$ で素因数分解の存在と一意性が成立しているだけではなく, $1/x$ を付け加えてできる Laurent 多項式環 $\mathbb{Q}[x, 1/x]$ でも素因数分解の存在と一意性が成立しています. 「中学生では」と言う前に自分の数学的理解度を高めることの方が大事.

2.6 具体的なツイートへの指摘その 5

- 引用元ツイート

> 多項式の因数分解は最も単純な多項式の積に分解する操作であり, 一意に決定されます. 従って $\times$. どうして正解にしたくなるかというと, 美しい変形を正しく行っているからであり, いい発想だねとほめてあげてもいい. 因数分解の意味や意義を教えるよい機会です. 授業で取り上げるのも教育的ですね.

これも微妙におかしなコメントだと思う. 適切な意味で素因数分解の存在と一意性が成立していれば, 別に多項式の範囲内で因数分解する必要はないです.

2.7 続き

必要な予備知識は一意分解整域についてです. しかし理学部数学科で教えていると, 学生に一意分解整域について理解してもらうのはかなり大変です. そういうそこそこ大変な話題になっているので, 甘く見て安易にコメントすると危険なネタであることをみんな認識した方がよいと思いました.

中学校レベルの数学であっても, 十分な専門知識が無ければ容易におかし

なことを幾らでも言えてしまえます. 教える側が数学を甘く見ないためには, いきなり「採点の仕方」について議論したりせずに, 自分自身の数学的知識が十分であるかについて考えるべきだと思います.

中学生が自分の発想で色々なことをやっているときに, 教える側は中学生の発想の甘いところを修正して, 適切で普遍的で価値ある考え方の方に導くように努力しなければいけない. そのとき教える側の数学的素養が低いと悲惨なことになる. 中学校の数学の内容の周辺の素養の習得は結構大変です.

ぶっちゃけた話をすると中学生に数学を教えるための数学的素養について私も自信がないです. 勉強が必要.

2.8 質問への回答その 1

- 引用元ツイート

  冒頭のアンケートの答えとしては「生徒は $\mathbb{Q}[\sqrt{x}]$ の世界で考えていると思われるがその場合回答は (素) 因数分解になっていないので $\times$」ということでしょうか.

いいえ.

数学の中身についても考える前に「マルかバツか」を問うことは有害な数学教育の原因になるのでやめろという話をしています. 強いて言えば「冒頭のアンケートにバツを付ける」が正しい!

2.9 質問への回答その 2

- 引用元ツイート

  $x < 0$ の部分の議論が不要であることはまだ完全に理解してないですが, この場合 $\sqrt{x} = i\sqrt{-x}$ と定義しても, $\sqrt{x} = -i\sqrt{-x}$ と定義してもいずれの場合も式が成立することはわかります. $\sqrt{x}$ を 2 価写像の

> ままにしておくと, 等式が成り立たない場合が存在すると思いますが, その点を詳しく教えて下さい.

考える方向が完全に的を外しています. 多項式環 $\mathbb{Q}[x], \mathbb{Q}[x,y]$ と剰余環 $\mathbb{Q}[x,y]/(y^2-x)$ の定義を正確に説明できるようになってから再度質問してみてください. 説明できるようになった瞬間に的を外していたことを理解すると思います.

2.10 質問への回答その 3

- 引用元ツイート

> FF 外から失礼します. 例えば, U15 の試合のルールでは許されているが, U12 の試合のルールでは許されていないことを, U12 の大会で使えば反則です. 与えられた制約の中で出来ることを考えるのも大切で重要な思考力であると私は考えます. 相手のレディネスに合わせて説明するときに重要なスキルです

私は, $\sqrt{x}$ の代数的な取り扱いを理解していないような人達が, $\sqrt{x}$ を使用した中学生への数学教育についておかしなコメントをしていることに気付いたので, このスレッドを書きました. 中学生への数学の教え方の議論を行うためのレディネスの話をしています. ある程度以上の数学的素養が必須!!

2.11 続き

例えば $\sqrt{x}$ = 剰余環 $\mathbb{Q}[x,y]/(y^2-x)$ における y の像 とみなす純代数的な取り扱いではなく, $\sqrt{x}$ を複素函数として取り扱うためには Riemann 面 (リーマン面) の概念が必要になります. $\mathbb{C}$ 上では多価になる $\sqrt{x}$ の定義域を二重被覆で持ち上げれば $\sqrt{x}$ を一価函数にできます. $\sqrt{x}$ を $x<0$ や $x\in\mathbb{C}$ の函数とみなしたいと思った瞬間に, 「多価函数をリーマン面上

の一価函数とみなす」というようなことをできるだけの数学的素養が必要になるのです．大学で数学をがっつり学んだ人以外には「色々なことをする中学生」にまともに数学を教えることは不可能だと思います．私は剰余環 $\mathbb{Q}[x, y]/(y^2 - x)$ やら $\sqrt{x}$ を一価にするリーマン面の話を中学生にしろと言っているのではありません．「色々やらかす中学生」に数学をまともに教えるために必要な数学的素養の話をしています．数学を教える側には数学の周辺に関する広い視野が必要で，私も自信がないと言っている．

子供が自分で適当に考えたこと (例えば $\sqrt{x}$ を使うことなど) について，数学を教える側の数学的素養が足りなくて，教える側が数学的に適切な正当化の方法を 1 つも思いつかずに，子供に難癖を付けるようになってもらっては困ります．子供に難癖を付けずに済むようになるためには数学的素養が必須です．

2.12　質問への回答

- 引用元ツイート

  [「数学的に正確に考えればどうなるか」に関する議論を省略して，「どのように採点するべきか」(以下略)] という発端ですが，そもそも解答に【いきなり】使って良いのは出題者，解答者ともに当たり前に共通理解のある事だけだと思います．それ以外は定義と証明が必要不可欠だと思います．

私が強く非難したいと思っている行為は，$\sqrt{x}$ を使った中学生にどのように有益な誘導を行うことができるだろうかと考える前に (そのためには数学的素養が必須)，以下のリンク先のように「採点の仕方」の話にしてしまうことです．採点の話にいきなりしてしまう行為自体がひどく有害だと思います．

有害であることは，アンケートツイートへの返答の多くがおかしな内容であることによっても示されていると私は思っています (具体的内容について

はスレッドの全体を参照). 私の経験では, いきなり「採点の仕方」の話にするような人達に子供の相手をさせることはかなり危険.

算数教育についても「1 つ分 × いくつ分の順序で書く」と教えていれば掛算順序でバツを付けてもよいとか, 問題文に「1 つ分 × いくつ分の順序で書くこと」のような但し書きがあれば掛算順序でバツを付けてもよいのような論外なことを言う人たちの相手を何年もしている.

大学入試の数学の採点についても「教科書に書いていない公式を使うと減点される. 使うときには導出や証明についても説明しなければいけない」というようなデマは定番になっています. 本当に嘆かわしいと思います.

2.13 具体的なツイートへの指摘

- 引用元ツイート

  私も高校のとき $(a+b+c)(a^2+\cdots)$ のタイプの因数分解が気にくわなくて, 四元数（あとで知りました）のようなことをわざわざ定義し, 無理やり因数分解して○にして貰えた (させた?) 経験があります. ○か × かの二極だからこそ判断に渋るというか難しさがあります.

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$ が「気にくわない」のは私も同感. 高校でせっかく複素数について習ったなら, $\omega^2+\omega+1=0$ を満たす複素数 ω に関する $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$ までやった方がお得. これを知っていれば三次方程式を解ける.

2.14 質問への回答

- 引用元ツイート

  そう, 困まるのは入試なんです. 採点する間柄だからと言って, 指導出

> 来る問柄とは限らない．どこの誰とも分からない入試の答案．受かってくれれば指導も出来るが, そうなるとも限らない．しかも, 入試の採点は短期決戦．という悩みも確かに存在するわけで, 元ツイが採点の悩みだから拘りました．

入試の採点についてデマを飛ばす人達は, 数学を理解していないがゆえに, 数学をまともにマスターすれば試験の点数も上がることを無視して, 「○○とすれば減点される」というようなデマを飛ばすことを優先する人達だと私は認識しています．数学を理解していないせいで採点基準にこだわることになる．受験生が数学を理解していればいるほど数学の入学試験で困ることは少なくなります．

そして入学試験を行う高校や大学側にとっても他の条件が同じなら数学をより理解している人に入学して来て欲しいことは明らか．数学的素養がない人に採点基準についてのデマ話を受験生が聞くのは時間の無駄．

参考文献