

2026-10-21 博士課程受け入れ面談用の記録

数学和尚 ダイナマイト関根 *

2026 年 10 月 24 日

1 2026-10-21 博士課程受け入れ面談用の記録

1.1 はじめに

基本は修士からの継続路線で、非相対論的場の量子論または量子統計力学の具体的な模型の挙動を調べたい。以下の議論では次の三通りの結果がある。

1. 既に教科書まである確立した結果.
2. 他の手法では確立している一方、対応する他の手法での結果を明記した文献が見当たらない結果.
3. (おそらく) 新規の結果.

非相対論的場の量子論では多体粒子系-ボース場の相互作用系が主で、相互作用はボース場の一次または二次の系を中心にする：ボース場の挙動として本質的には非自明な平均を持つガウス場に帰着する。一次の系はフォノンのような準粒子のボース場で、二次の系は主に QED である。一粒子の場合の代表例は Nelson 模型

$$H_N = -\frac{1}{2}\Delta + V + d\Gamma(\omega) + \phi(x),$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\hat{\rho}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} (e^{-ik \cdot x} a^*(k) + e^{ik \cdot x} a(k)) dk$$

と Pauli-Fierz 模型

$$H_{PF} = \frac{1}{2} (-i\nabla - eA(x))^2 + V + d\Gamma(\omega)$$

である [20, 26]. ここで $\omega(k) = |k|$ が典型的な分散関係, $\hat{\rho}$ は電荷分布の実で偶なフーリエ変換, A は紫外切断付きの量子化されたベクトルポテンシャルである。

量子統計力学としては連続空間または格子上のボース多体系を調べる。運動項はボース場と変わらない一方、相互作用系はふつう ϕ^4 などと同じく場 (生成・消滅作用素) の四次が現れる。

$$H = \int a^*(x) \left(\left(-\frac{1}{2}\Delta - \mu \right) a \right) (x) dx$$

$$+ \frac{1}{2} \iint v(x-y) a^*(x) a^*(y) a(y) a(x) dx dy$$

が典型である [30]. この点で多体粒子系-ボース場の相互作用系とは本質的に違う特徴を持つ。確率論的な定式化で見ても大きな違いがある。

* phasetr@gmail.com

博士課程では修士からの継続課題として多体粒子系-ボース場の相互作用系に関する議論を整理したあと、BEC を軸に粒子系-場の相互作用系とボース多体系の研究を進めたい。

数学的に言うと次のような流れがある。

- 具体的な模型の研究は物理的な系を表す非有界な自己共役作用素 (ハミルトニアン) の研究, 特にスペクトル解析や固有値・固有ベクトル (基底状態) の議論, 平衡状態の議論にあたる。
- 作用素環が現れる場所
 - 基底状態: 発散の困難, 特に赤外挙動に伴うユニタリ非同値性。
 - 平衡状態: (私にとって) 自然な定式化は作用素環での KMS 状態。
- 確率論が現れる場所
 - 場の量子論または量子統計力学に対する公理系の対応
 - 相対論的な場の量子論では公理的場の量子論・代数的場の量子論・構成的場の量子論
 - 量子統計力学では確率正値的 KMS 系・周期的 OS-正値な確率過程

1.2 作用素論・作用素環と確率論の対応

相対論的な場の量子論では次のような定式化がある。

- 公理的場の量子論: 関数解析・非有界作用素論 [27]
- 代数的場の量子論: 作用素環 [12]
- 構成的場の量子論: 確率論 [10, 21]

これらの定式化は適切な形で非相対論的な場の量子論にも降り, 主に真空状態または基底状態の議論に対応する。一方で主に非相対論的な有限温度の議論で次の対応がある。

- 確率正値的 KMS 系: 作用素環
- 周期的 OS-正値な確率過程: 確率論

相対論的な場の量子論と同じく, 場の期待値の族としての相関関数の対応で特徴づけられる。

作用素環側の平衡状態は時間発展 τ に対する β -KMS 条件

$$\omega(A\tau_{i\beta}(B)) = \omega(BA)$$

で定める [5, Section 5.3]. 有限体積では $\omega(A) = \text{Tr}[e^{-\beta H}A]/Z_\beta$, $Z_\beta = \text{Tr}[e^{-\beta H}]$ である。確率正値性をみたす可換な観測量 $A_j = f_j(Q)$ と $0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n \leq \beta$ について

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Z_\beta} \text{Tr} \left[e^{-(\beta-\tau_n)H} A_n e^{-(\tau_n-\tau_{n-1})H} \dots A_1 e^{-\tau_1 H} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\text{Pr}} [f_n(\xi_{\tau_n}) \dots f_1(\xi_{\tau_1})] \end{aligned}$$

をみたす周期 β の確率過程 ξ とその法則 Pr が得られる。この過程は虚時間の反転 $\tau \mapsto -\tau \pmod{\beta}$ が誘導する Θ について, $[0, \beta/2]$ の値だけに依存する F に対して周期的 OS-正値性

$$\mathbb{E}_{\text{Pr}} [\overline{\Theta(F)}F] \geq 0$$

をみたし, 逆にこの性質から確率正値的 KMS 系が再構成される [14, Theorem 6.1 and Sections 7–8]. 有限温度の再構成は [7] にもある。

1.3 粒子場の相互作用系の絶対零度

一般に模型ごとに特性が異なる。特に私が扱っている範囲では相互作用が場の一次か二次かで大きく変わる。特にここでは一次の場合の振る舞いを考える。

Nelson 模型では Feynman–Kac 公式で場を積分すると、基底状態は Wiener 測度 Pr_W に対する経路測度

$$\begin{aligned} d\text{Pr}_T(X) &= \frac{1}{Z_T} e^{-S_T(X)} d\text{Pr}_W(X), \\ S_T(X) &= \int_{-T}^T V(X_t) dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T U(X_t - X_s, t-s) ds dt, \\ U(x, t) &= \frac{1}{2} \int \frac{|\hat{\rho}(k)|^2}{\omega(k)} e^{-\omega(k)|t|} e^{ik \cdot x} dk \end{aligned}$$

の $T \rightarrow \infty$ の極限で調べられる [3, 17].

1.3.1 紫外特異性

エネルギーのくり込みが必要になる。 $|k| \leq \Lambda$ で $\hat{\rho}(k) = g$, それ以外で 0 とした模型を H_Λ とする。

$$E_\Lambda = -\frac{1}{2} \int_{|k| \leq \Lambda} \frac{|\hat{\rho}(k)|^2}{\omega(k) (\omega(k) + |k|^2/2)} dk$$

は $\Lambda \rightarrow \infty$ で $\log \Lambda$ の次数で発散する一方、 $H_\Lambda - E_\Lambda$ はレゾルベントの意味で収束する [11, 20].

1.3.2 赤外特異性

作用素論・作用素環から見ると基底状態のユニタリ非同値性がある。確率論から見ると赤外正則化つき模型の基底状態に対応する確率測度と、赤外正則化を外した模型の基底状態に対応する確率測度は互いに特異である。

赤外正則条件は

$$\int \frac{|\hat{\rho}(k)|^2}{\omega(k)^3} dk < \infty$$

である。三次元で $\omega(k) = |k|$ かつ $\hat{\rho}(0) \neq 0$ ならこの積分は発散し、フォック空間に基底状態は存在せず、非フォック表現に基底状態が存在する [1, 18]. 厳密に解ける例は van Hove 模型 $d\Gamma(\omega) + \phi(0)$ である [6]. その基底状態に対応する時刻 0 の場の測度 Pr_ρ は、自由場のガウス測度 Pr_f を $\hat{m} \propto -\hat{\rho}/\omega^2$ だけ平行移動したガウス測度である。 m が Pr_f の Cameron–Martin 空間に属する条件は赤外正則条件と一致する。したがって Cameron–Martin の定理から、赤外正則なら Pr_ρ と Pr_f は同値、赤外正則でなければ互いに特異である [4, 24]. 赤外正則化した ρ_δ では Pr_{ρ_δ} と Pr_f が同値なため、 Pr_ρ と Pr_{ρ_δ} は互いに特異である。

確率偏微分方程式では、共分散 C 、平均 m のガウス測度を不変測度を持つ Ornstein–Uhlenbeck 型の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi = -C^{-1} (\Phi - m) + \sqrt{2} \xi$$

が最も簡単な模型になる [13, Sections 2.3, 4.4 and 6]. ここで ξ は時空白色雑音である。van Hove 模型の場合、赤外特異性は二つの方程式の不変測度が互いに特異になることとして読める。

確率偏微分方程式的な記述でも確率測度の特異性に対応する結果が得られると推測できる。確率偏微分方程式として面白いかどうかはわからないが、非相対論的場の量子論への確率偏微分方程式の応用への第一歩としては一定の意義はあると考えている。

1.4 粒子場の相互作用系の有限温度

有限温度では BEC に関する振る舞いがある：ここで想定されるボース場はいわゆる準粒子の場で、これは BEC を起こさないとされる。しかし数学的・形式的には自由ボース気体と同じ振る舞いをしてしまうため、BEC を排除する機構を検討する必要がある。ここで場の量子論と量子統計力学の議論が一部つながる。

自由場部分の KMS 状態の二点関数は

$$\omega_\beta(a^*(f)a(g)) = \left\langle g, \left(e^{\beta(\omega-\mu)} - 1\right)^{-1} f \right\rangle$$

である [5, Section 5.2]. 特に化学ポテンシャル μ は質量正則化のように振る舞う。準粒子は粒子数を保存しないため $\mu = 0$ である。一方で式としては自由ボース気体で $\mu \uparrow 0$ とした状態と同じで、三次元で $\omega(k) = |k|$ なら

$$\rho_c(\beta) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{e^{\beta|k|} - 1} \frac{dk}{(2\pi)^3} < \infty$$

のように書ける。したがって $\rho_c(\beta)$ を超える密度を指定すると、自由ボース気体と同じ形の凝縮成分が形式的に現れる。Nelson 模型と Pauli-Fierz 模型でのこの点の整理は [25] にある。

1.5 ボース粒子系の有限温度

自由ボース気体または自由ボース場では絶対零度で特に面白い現象は起きない。相互作用系なら絶対零度であっても BEC をはじめとして非自明な現象が起きる。ここではいったん有限温度に限定して議論する。

自由ボース気体に限らずボース粒子系の有限温度では、平衡状態に対する確率的な記述として経路積分・ループ表示の議論がある。これは実際に適当な意味で粒子の経路を追いかける議論で、場の汎関数積分とは大きく違う定式化にあたる。

x から y への時間長 β のブラウン橋の非規格化測度を $\mathbb{W}_{x,y}^\beta$ とすると、 N 粒子の正準分配関数は

$$Z_{\Lambda,N} = \frac{1}{N!} \sum_{\pi \in S_N} \int_{\Lambda^N} \prod_{i=1}^N dx_i \int e^{-I_N(X)} \prod_{i=1}^N d\mathbb{W}_{x_i, x_{\pi(i)}}^\beta(X_i),$$

$$I_N(X) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \int_0^\beta v(X_i(t) - X_j(t)) dt$$

と書ける。置換 π の長さ q のサイクルは時間長 $q\beta$ の閉経路 (ループ) になる [9, pp. 358–361, equations (2.28)–(2.33)]. 自由系では一粒子作用素 h と活量 z について

$$\log \Xi_0(\beta, z) = -\text{Tr} [\log (1 - ze^{-\beta h})] = \sum_{q \in \mathbb{N}_1} \frac{z^q}{q} \text{Tr} [e^{-q\beta h}]$$

が成り立つ。左辺の逆行列式は複素ガウス場の積分、右辺の各項は長さ q のループの寄与である [22, Sections 4–8]. 相互作用系では複素コヒーレント状態の作用

$$S_{\text{coh}} = \int_0^\beta \left\langle \phi_\tau, \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + h - \mu \right) \phi_\tau \right\rangle d\tau + (\text{四次の項})$$

が一般に実数値でないため、場の表示は正值な確率測度とは限らない。

相転移に伴う平衡状態の一意性の問題がある。特に自由ボース気体では物理的にはある臨界密度があり、臨界密度を境に平衡状態が一意か非可算無限個あるか変わる。作用素環としては KMS 状態 (平衡状態) の一意性・非一意性に対応する。これと素直に対応する汎関数積分的な定式化では作用素環上の状態に対応する測度の一意性・非一意性に対応する。経路積分・ループ表示では無限ループの挙動によって BEC の発現が判定できる。

$h = -\frac{1}{2}\Delta$ の自由ボース気体の臨界密度は

$$\rho_c(\beta) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{e^{\beta|k|^2/2} - 1} \frac{dk}{(2\pi)^d} = \frac{\zeta(d/2)}{(2\pi\beta)^{d/2}}$$

で、 $d \geq 3$ で有限、 $d = 1, 2$ で無限大である。 $\rho > \rho_c(\beta)$ とし、 $\rho_0 = \rho - \rho_c(\beta)$ とする。このとき $\theta \in [0, 2\pi)$ ごとに

$$\begin{aligned} \omega_\theta(W(f)) &= \exp\left(-\frac{1}{4}q(f) + i\sqrt{2\rho_0} \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta}\widehat{f}(0)\right)\right), \\ q(f) &= \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(k)|^2 \left(1 + \frac{2}{e^{\beta|k|^2/2} - 1}\right) \frac{dk}{(2\pi)^d} \end{aligned}$$

が同じ時間発展に対する KMS 状態になる。ゲージ変換 γ_α は $\omega_\theta \circ \gamma_\alpha = \omega_{\theta+\alpha}$ と移すため、これがゲージ対称性の自発的破れと平衡状態の非一意性にあたる [2], [30, Section 4.3.2], [23].

ループ表示では、熱力学極限で長さ q のサイクルが担う密度は $\rho_q = (2\pi q\beta)^{-d/2}$ で、

$$\rho - \sum_{q \in \mathbb{N}_1} \rho_q = \rho - \rho_c(\beta) = \rho_0$$

となる。すなわち凝縮密度は熱力学極限で長さが発散するサイクルが担う [28, Sections 1–2], [29, Sections 2–3]. Feynman–Kac 公式からの非対角長距離秩序の確率論的証明は [15, Sections 1–4] にある。

確率偏微分方程式でどのように有限温度が記述できるのか把握できていないものの、もし何かしらの記述ができるなら、自由場であっても確率偏微分方程式による BEC の記述・判定法は一定の意義がある：2026 年でもなお自由ボース気体の BEC に関する特徴づけのプレプリントが出ているため、これは非自明な結果とみなせると考えている。

1.6 番外： ϕ^4 と量子統計力学

Fröhlich の論文で二次元トラス上のボース粒子系の適切なくり込みで ϕ_2^4 が得られるという研究がある。この拡張として三次元トラス版の研究もある。くり込みの物理的背景、ボース多体系のくり込みという観点からの ϕ^4 の物理的意義づけという議論につながるとされている。

二次元トラス Λ 上で、到達距離 ε の対相互作用 v^ε と助変数 $\nu > 0$ を持つハミルトニアン

$$\begin{aligned} H &= \nu \int_{\Lambda} a^*(x) \left(\left(\kappa - \frac{1}{2}\Delta \right) a \right)(x) dx \\ &\quad + \frac{\nu^2}{2} \int_{\Lambda} \int_{\Lambda} a^*(x) a(x) v^\varepsilon(x-y) a^*(y) a(y) dx dy \\ &\quad - \nu \alpha_{\nu\varepsilon} \int_{\Lambda} a^*(x) a(x) dx + \theta_{\nu\varepsilon} \end{aligned}$$

を考える．発散する化学ポテンシャル $\alpha_{\nu\varepsilon}$ と定数 $\theta_{\nu\varepsilon}$ を適切に選び, $\varepsilon \geq \exp\left(-(\log \nu^{-1})^{1/2-c}\right)$ をみたしながら $\nu, \varepsilon \rightarrow 0$ とする．このとき大正準状態の相対分配関数と Wick 順序づけた縮約密度行列は, 共分散 $(\kappa - \frac{1}{2}\Delta)^{-1}$ の複素ガウス自由場 Pr_{fr} に対する測度

$$\frac{1}{\zeta} e^{-V} d\text{Pr}_{\text{fr}}, \quad V = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} :|\phi(x)|^4: dx$$

の分配関数と Wick 順序づけた相関関数に収束する [8, Theorem 2.1, (2.22)–(2.24)]. ϕ_2^4 の Wick 順序づけに伴う質量の相殺項が, ボース気体では化学ポテンシャルのくり込みとして実現される [8, (2.16)–(2.18)]. 三次元トーラスで ϕ_3^4 測度を導く研究は [19], 非局所相互作用での二・三次元の古典場極限は [16] にある．

参考文献

- [1] A. Arai. Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a non-Fock representation. *Rev. Math. Phys.*, Vol. 13, pp. 1075–1094, 2001.
- [2] H. Araki and E. J. Woods. Representations of the canonical commutation relations describing a nonrelativistic infinite free Bose gas. *J. Math. Phys.*, Vol. 4, pp. 637–662, 1963.
- [3] V. Betz, F. Hiroshima, J. Lörinczi, R. A. Minlos, and H. Spohn. Ground State Properties of a Particle Coupled to a Scalar Quantum Field, 2000. arXiv:math-ph/0011043; preprint, Technische Universität München.
- [4] V. I. Bogachev. *Gaussian measures*, Vol. 62 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [5] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2: Equilibrium States, Models in Quantum Statistical Mechanics*. Texts and Monographs in Physics. Springer, 1997. 2nd edition.
- [6] Jan Dereziński. Van Hove Hamiltonians—Exactly Solvable Models of the Infrared and Ultraviolet Problem. *Annales Henri Poincaré*, Vol. 4, No. 4, pp. 713–738, 2003.
- [7] J. Fröhlich. The reconstruction of quantum fields from Euclidean Green’s functions at arbitrary temperatures. *Helv. Phys. Acta*, Vol. 48, pp. 355–369, 1975.
- [8] Jürg Fröhlich, Antti Knowles, Benjamin Schlein, and Vedran Sohinger. The Euclidean ϕ_2^4 theory as a limit of an interacting Bose gas. *Journal of the European Mathematical Society*, Vol. 27, No. 11, pp. 4399–4468, 2025.
- [9] J. Ginibre. Some Applications of Functional Integration in Statistical Mechanics. In C. DeWitt and R. Stora, editors, *Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, pp. 327–427. Gordon and Breach, New York, 1971.
- [10] James Glimm and Arthur Jaffe. *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View*. Springer-Verlag, 2nd ed. edition, 1987.
- [11] Massimiliano Gubinelli, Fumio Hiroshima, and József Lörinczi. Ultraviolet renormalization of the Nelson Hamiltonian through functional integration. *Journal of Functional Analysis*, Vol. 267, No. 9, pp. 3125–3153, 2014.
- [12] Rudolf Haag. *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. Springer, 1996.
- [13] Martin Hairer. *An Introduction to Stochastic PDEs*, 2023.

- [14] Abel Klein and Lawrence J. Landau. Stochastic Processes Associated with KMS States. *J. Funct. Anal.*, Vol. 42, pp. 368–428, 6 1981.
- [15] W. Konig, Q. Vogel, and A. Zass. Off-Diagonal Long-Range Order for the Free Bose Gas via the Feynman–Kac Formula. *Ann. Appl. Probab.*, Vol. 35, No. 6, pp. 4030–4066, 2025. arXiv: 2312.07481.
- [16] Mathieu Lewin, Phan Thành Nam, and Nicolas Rougerie. Classical field theory limit of many-body quantum Gibbs states in 2D and 3D. *Inventiones mathematicae*, Vol. 224, No. 2, pp. 315–444, 2021.
- [17] J. Lörinczi, F. Hiroshima, and V. Betz. *Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space: With Applications to Rigorous Quantum Field Theory*. Walter De Gruyter, 6 2011.
- [18] J. Lörinczi, R. A. Minlos, and Herbert Spohn. The infrared behaviour in Nelson’s model of a quantum particle coupled to a massless scalar field. *Annales Henri Poincare*, Vol. 3, pp. 269–295, 6 2002.
- [19] Phan Thành Nam, Rongchan Zhu, and Xiangchan Zhu. Φ_3^4 Theory from many-body quantum Gibbs states, 2025. arXiv:2502.04884.
- [20] E. Nelson. Interaction of Nonrelativistic Particles with a Quantized Scalar Field. *J. Math. Phys.*, Vol. 5, No. 9, pp. 1190–1197, 9 1964.
- [21] K. Osterwalder and R. Schrader. Axioms for Euclidean Green’s functions. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 31, pp. 83–112, 1973. Also *Comm. Math. Phys.* 42, 281–305 (1975).
- [22] M. Salmhofer. Functional integral and stochastic representations for ensembles of identical bosons on a lattice. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 385, pp. 1163–1211, 2021. The original arXiv version corrects journal typesetting misprints, including a missing plus sign in Equation (223).
- [23] Yoshitsugu Sekine. A Note on the Resolvent Algebra and Functional Integral Approach to the Free Bose Einstein Condensation, 4 2026.
- [24] Yoshitsugu Sekine. A Note on the Resolvent Algebra and Functional Integral Approach to the van Hove Model, 4 2026.
- [25] Yoshitsugu Sekine. No-Go Theorem for BEC in the Nelson and Pauli–Fierz Models, 6 2026. arXiv:2606.09538v1.
- [26] Herbert Spohn. *Dynamics Of Charged Particles And Their Radiation Field*. Cambridge Univ. Press, 2004.
- [27] R. F. Streater and A. Wightman. *PCT, spin and statistic and all that*. Princeton University Press, 1980.
- [28] A. Sütő. Percolation Transition in the Bose Gas II. *J. Phys. A: Math. Gen.*, Vol. 35, No. 33, pp. 6995–7002, 2002. arXiv: cond-mat/0204430.
- [29] Daniel Ueltschi. Feynman Cycles in the Bose Gas. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 47, No. 12, p. 123303, 2006. arXiv: math-ph/0605002.
- [30] André F. Verbeure. *Many-Body Boson Systems: Half a Century Later*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer, 12 2010.