0.14.4 超関数論の気分

【目次へのリンク】

目次

0.14.4.1 はじめに

> 「超関数論の数学的な理論は全く知りません．しかし困ったことは一度もありません.」

うるさいことを無視すれば, 物理で出会う超関数は本質的にはディラックの δ 関数です．場合によっては学部一年から出会います．理論はどうでもよくとにかく計算だけはできるようにすればいいと言われても, フーリエ変換やそれに関わる留数解析のように超関数論以外の部分での理論があり, これも細かい理屈はともかく計算できるようになれと言われてとにかく疲弊します．そうこうしているうちに本当に数学の理論を知らなくても計算できて物理ができることがわかってきます．そのうち物理も楽しくなってきて当初抱えていた超関数論への興味もなくなっているでしょう.

しかしこれは物理学科の学生の思考遍歴であって, 世の中必ずしも学生時代に勉強するだけではありません．趣味の勉強として超関数論を勉強してみたい人もいるでしょう．厳格な超関数論の基礎は現代数学探険隊で触れているので, ここでは超関数論のモチベーションや周辺の話題を眺めます.

0.14.4.2 寄り道: 各分野の「聖域」

各分野には聖域があります．これは誰にもわかるところの神聖不可侵な場所というより, 分野外の人間には興味を持たれず人知れずひっそりと佇んでいる場所というイメージです.

超関数に関して詳しいことを知らなくても何も困りません．それでも深いところまで気になってしまう人達がいて, その奥地にまで踏み込む能力を持ち, その興味を共有できる人々だけの聖域なのです．そこに触れる特権を持つといってもいいでしょう．超関数はまさにこの意味での聖域です．聖域に触れたければ興味関心を深く持つ・持てる特殊技能が必要とも言えます．超関数論で言えば集合や位相の基礎・基本をおさめていないと聖地には近づく

ことさえできません. ここで言う聖地は近づくのも大変なタイプの聖地です.

物理では量子力学などが聖地でしょう. 他の分野でも応用は多いものの, 物理には物理だけの特有な問題意識があります. 化学では量子力学を使うにしても電子が何十もあるのがふつうです. 実際, 学部三年で化学科の講義に出てみたとき, 「電子がこのくらいの数しかないなら十分に扱える」と言っていて衝撃を受けたことがあります. 物理では電子一個の水素をゴリっとやり, 電子二個のヘリウムを難しいといい, 三個以上は大変だからもう一般の多体系で不可弁別性などの議論に流れます. 興味関心を持つところが全然違うのです. ここには物理の聖域がある一方で化学の聖域もあるのでしょう.

何はともあれ聖域をどうおさえるかが他分野理解のポイントです. これをどう翻訳できるか・してもらえるかが大事とも言えます.

0.14.4.3 いろいろな超関数論

私が知る限り超関数論もいろいろあります.

- 関数解析的な超関数論: シュワルツの超関数, distribution.
- 代数解析的な超関数論: 佐藤超関数, hyperfunction.
- コロンボーの一般化関数.

最初に断わっておくと, 現在では超関数論は数学でもあまり詳しくは議論されません. 関数解析的な議論では超関数論は基本的なところを触れたらソボレフ空間論にうつります. 流体力学などではベゾフ空間のようなもっと複雑な空間も使うものの, シンプルで使い勝手もいいのがソボレフ空間です. 聞くところによれば佐藤超関数も超局所解析のようなもっと進んだ議論の方が大事だと聞いています. コロンボーの一般化関数は上の二つの超関数論の欠点を埋めるための理論で毛色が違います.

後者二つは私の手に負えないので以下の議論ではシュワルツの超関数に集中します.

0.14.4.4　関数解析と超関数論

関数解析に限らずいろいろな理論は何かの応用を目指して作られています．関数解析の基礎はヒルベルト空間論とバナッハ空間論で，ヒルベルト空間論は積分方程式，バナッハ空間論は微分方程式への応用から生まれました．超関数論も微分方程式への応用が重要です．実際にこれからの話も微分方程式を中心に展開します．

0.14.4.5　なぜ超関数論か: 代数方程式論との比較

まず方程式論の観点から超関数論を見ましょう．超関数論の使いづらさとも直結する視点として，方程式の解を探すことを考えましょう．

一変数の n 次の代数方程式の解は複素数まで考えれば重複を込めて n 個の解を持ちます．ここで出てくる複素数がまさに代数方程式での超関数です．代数方程式にとっての複素数は「ここまで考える範囲を大きくすれば必ず解がある」という空間です．超関数も同じで解を探すために調べる空間を大きくするのがその基本です．解析学でよく弱解・弱位相・弱収束など「弱—」とあるのは，条件を弱くして捕捉対象を増やす工夫なのです．

0.14.4.6　なぜ超関数では不足か: 線型代数的側面・非線型解析

方程式論から見た超関数の限界です．一般にディラックの δ 関数をはじめとして超関数に積は定義できません．超関数の空間論から見ると，これはシュワルツの超関数の空間が線型空間であることと整合的です．

これで何が困るかというと超関数の空間内で非線型方程式が定義できません．応用上たいていの微分方程式は非線型なので，超関数論はほとんど使えません．本質的に線型性を仮定できるのは量子力学・シュレディンガー方程式くらいでしょう．

もちろんあくまで直接的には難しいだけで適当な工夫をすればある程度は

対応できます．シュワルツ超関数の定義を変える・一般化する方向もあれば，超関数の適当な部分集合または類似の空間を考える方向もあります．後者のアプローチの一つがソボレフ空間論です．流体力学ではベゾフ空間なども使われますし，粘性解の方法が有効な方程式のクラスもあります．

微分方程式は複素係数多項式より対象が面倒になっている分，対応も面倒になってはいるものの気分は同じです．

ここで一つ注意してほしいのは中学・高校以来の代数方程式とその解を考える議論，そのモチベーションが通底している事実です．数学サイドからすればなぜ超関数論やそのバリエーションが大事かと言われても，「中学・高校でさんざんやった方程式論の話なのだからもう言う必要はないだろう」と思っているのかもしれません．逆に言えば，中学・高校数学の段階，さらに言えば小学校の算数の時点で数学科・非数学科間の算数・数学に対する基本的な認識に恐ろしく深く広い溝があります．これについては 0.6 章を見てください．特に次のページで公開しています．

- 現代数学観光ツアー 面積からの集合論入門

0.14.4.7　なぜ超関数では不足か: 位相的側面

もう一つの問題は位相が扱いづらい問題があります．ノルム一つで決まるヒルベルト空間やバナッハ空間の単純さとは程遠く，あとで紹介するように超関数は位相が非常に面倒です．位相の複雑さも超関数の欠点です．

0.14.4.8　超関数の定義に向けて: 試験関数の空間の定義

シュワルツの超関数は試験関数の双対空間として定義されるので，まずは試験関数を定義する必要があります．集合としての $\mathcal{D}(\Omega)$ は $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega)$ です．問題は超関数用に入れる位相です．ここでは特に点列の収束を使って位相を定義します．

位相の定義のため, 記号を一つ準備しましょう. 位相空間 X の部分集合 K 上での上限ノルムを $\|\cdot\|_{C(K)}$ と書くことにします. 上限を取る集合を K として指定した形です. 念のため本質的上限ノルム, つまり $\|\cdot\|_{L^\infty(K)}$ と区別して書いておくことにします. 時々この区別なしに $\|\cdot\|_{\infty,K}$ のように書くこともあります. 連続関数を考えている限り本質的上限ノルムと上限ノルムは一致しますし, 出てくる関数が連続ならそれは別途明示するので, ふつうは大きな問題にはなりません.

では $\mathcal{D}(\Omega)$ の位相を定義しましょう.

Definition 0.14.4.1

C_c^∞-級関数の点列 $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ を取り, 次のような条件での収束を考えるとき, $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{D}(\Omega)$ で ϕ に収束するという.

(1) この関数列と ϕ に対して, ある固定された Ω のコンパクト集合 $K = K(\phi, (\phi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ が存在する.

(2) 全ての自然数 n に対して関数 $(\phi_n - \phi)$ の台が K に含まれる.

(3) 全ての多重指数 α に対して K 上一様に $\partial^\alpha \phi_n \to \partial^\alpha \phi$ である: つまり $\|\phi_n - \phi\|_{C(K)} \to 0$ である.

ここで $\|f\|_{C(K)} = \sup_{x\in K} |f(x)|$ と定義した. この収束による位相を入れた $C_c^\infty(\Omega)$ を $\mathcal{D}(\Omega)$ と書き, 試験関数の空間 (space of test functions) と呼ぶ.

Remark 0.14.4.2

ここで連続関数に対しては $\|f\|_{C(K)} = \sup_{x\in K} |f(x)|$ はノルムです. しかし無限階微分可能な関数 f に対して $p_\alpha(f) = \sup_{x\in K} |\partial^\alpha f(x)|$ はセミノルムであってもノルムではありません.

まず $\|f\|_{C(K)}$ がノルムになることのうち, スカラー倍に関する挙動と三角不等式は実数の絶対値または $\mathbb{R}^d$ のユークリッドノルムの三角不等式に由来します. 実数論または数学的にきちんと議論した教養の微分積分に精通していないとはまるポイントかもしれません.

セミノルムにしかならないのは導関数が消えるからといってもとの関数ま

で消える保証がないからです．多項式を考えればイメージしやすいでしょう．これも微分積分が数学的にきちんと身についているかが問われます．

何にせよ無限個のセミノルムとそれらを使った収束で位相が定義されていて，非常にややこしいです．いまや標準的な位相空間論は開集合で組まれていて閉集合や収束で位相を定義して議論を進めるスタイルの本はほぼありません．そこのギャップも難しくなる理由の一つでしょう．しかしこれは線型位相空間論では標準的な議論です．特にヒルベルト空間やバナッハ空間でも弱位相の定義として採用できます．その意味でも重要な議論です．

この位相については解析学編の探険パート 1.5.22.36.1 節で補足を入れてあります．

0.14.4.9 超関数の空間 $\mathcal{D}(\Omega)^*$ とその収束の定義

ここまで来れば超関数の定義は簡単です．

Definition 0.14.4.3
$\mathbb{R}^d$ の開集合 Ω に対して $\mathcal{D}(\Omega)$ を試験関数の空間とする．

(1) ($\mathcal{D}(\Omega)$ 上の線型汎関数の連続性) $\mathcal{D}(\Omega)$ 上の線型汎関数 T が連続であることを次のように定義する: $\mathcal{D}(\Omega)$ の点列 $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と ϕ を取り，$\mathcal{D}(\Omega)$ で $\phi_n \to \phi$ となるとき，$T(\phi_n) \to T(\phi)$ である．
(2) (超関数の定義) 試験関数の空間 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上の連続な線型汎関数を**超関数** (distribution) と呼び，超関数の空間を $\mathcal{D}(\Omega)^*$ と書く．空間 $\mathcal{D}(\Omega)^*$ は定義によって線型空間である．
(3) (超関数列の収束) 次のように定義する: $\mathcal{D}(\Omega)^*$ の点列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と $T \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ を取り，任意の $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して $T_n(\phi) \to T(\phi)$ となるとき，超関数列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{D}(\Omega)^*$ で T に収束するという．

超関数の収束は汎関数としての各点収束であり，$\mathcal{D}(\Omega)$ の収束の強さと反比例して $\mathcal{D}(\Omega)^*$ の位相はかなり弱いです．微分という暴力的な写像が連続

になるほどに弱いです．これはふつうの関数が各点収束するときには連続性すら保たれないことを考えれば，大きな違いであることは実感しやすいのではないでしょうか．だからこそ超関数が扱いづらいとも言えますし，ここまで弱めたからこそデルタ関数を議論できる土壌になっているし，超関数微分のような無茶ができるとも言えます．

改めて強調しておくと，超関数は $\mathcal{D}(\Omega)$ 上の線型汎関数であり，ふつうの意味の関数，つまり Ω 上の関数ではありません．それにも関わらず Ω 上の関数で超関数を近似することはできます．これはディラックの δ 超関数を熱核などの関数列で近似するお作法の一般化と言えます．ちなみにディラックの δ 関数の扱いに関しては，宿題 1.5.22.5 を参考にしてください．

まずはこの後者の線を追うため，超関数の空間に関数を埋め込む方法から考えましょう．

0.14.4.10　注意

先程の文章でいくつか補足しないといけない点があるでしょう．簡単に補足を入れます．

Remark 0.14.4.4
- (位相の強弱について) 1.4.5.10.1 節の記述を参照してください．一般に位相が強くなると次のような特徴が出てきます．
  - その空間を始域とする写像が連続になりやすくなる．
  - その空間を終域とする写像が連続になりにくくなる．
  - 点列が収束しにくくなる．

  逆に位相が弱ければ弱いほど点列が収束しやすくなります．

  これをさらに汎関数の空間の位相に応用する必要があります．テスト関数の空間の $\mathcal{D}(\Omega)$ の空間は可算無限個のノルムを使っているので，この空間で収束するには強烈に強い性質を持つ必要があります．そして双対空間の位相はもとの空間の位相の強さと反比例します．つまり $\mathcal{D}(\Omega)$ の位相が強いほど $\mathcal{D}(\Omega)^*$ の位相は弱くなります．これは汎関数

の空間に入れる位相の定義によります．もっと言えば $\mathcal{D}(\Omega)^*$ の位相はいわゆる弱位相を想定しているのでよけい位相が弱くなります．
詳しくは関数解析を勉強してもらうしかないのでここでこれ以上詳しく議論はしませんが，これを念頭に置いて勉強を進めてもらうといいでしょう．

- 「微分という暴力的な写像」についてコメントします．微分の暴力性は高校の力学での例を見ればいいでしょう．例えば加速度が $(2n, 2n+1)$ で -1, $(2n+1, 2n+2)$ で $+1$ であるときの運動を考えます．このとき速度は折れ線型で，変位は二次関数をうまくつないだ形になっています．つまり積分すると関数が滑らかになるわけです．これを逆に回せば「微分すると関数の滑らかさが減る」と読めます．この望ましい性質 (連続性) を破壊することを暴力的と呼んでいます．

0.14.4.11 超関数微分: 微分法の一般化

超関数は関数の一般化というよりも微分法の一般化だと言われることもあります．超関数微分はソボレフ空間にも持ち込まれる点でも重要です．
超関数の微分は次のように定義します．

Definition 0.14.4.5
ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の開集合 Ω を取り，$T \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ とし，$\alpha \in \mathbb{N}^d$ を多重指数とする．超関数の導関数 $\partial^\alpha T$ は試験関数 $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ を使って次のように定義する．

$$(\partial^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \phi). \tag{0.14.4.1}$$

この微分を超関数微分または弱微分と呼び，超関数微分による導関数を超導関数と呼ぶ．

Remark 0.14.4.6 (1) 超関数微分は裏で部分積分を使っています．命題 1.5.22.9 の埋め込み写像 T を使って $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ に対して T_f を考え

ましょう．特に試験関数 ϕ に対して $\operatorname{supp}\phi \subset K \subset \Omega$ をみたすコンパクト集合 K が $K = \prod_{k=1}^{d}[a_k, b_k]$ と書けると思って部分積分すると次の等式が得られます．

$$(\partial^\alpha T_f)(\phi) = (-1)^\alpha \int_\Omega (\partial^\alpha \phi) f = \int_\Omega (\partial^\alpha f)\phi = T_{\partial^\alpha f}(\phi). \quad (0.14.4.2)$$

台がコンパクトなので区間の端では消えることを使っています．これで超関数微分は古典的な微分を拡張していることがわかりました．そしてこの超関数微分の意味で超関数は無限階微分可能です．

(2) $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に属している限り, 微分不可能な関数でも超関数微分はできます．しかし超関数微分した超関数が関数であるとは限りません．
有名な例がヘビサイド関数 $\Theta = \chi_{[0,\infty)}$ です．これ自体はふつうの関数であるものの, 超関数微分はディラックの δ 関数です．

0.14.4.12　関数解析に向けたまとめ

超関数とその微分の定義までにいくつかのポイントがありました．関数解析から見たポイントをまとめておきましょう．

- 試験関数の空間
  - 線型空間であること．
  - 陰に陽に実数論や連続関数の理論が出てくること．
  - コンパクト集合の登場．
  - セミノルムの登場．
  - (広義) 一様収束の登場．
  - 点列の収束による位相の導入．
- 超関数の空間
  - 線型汎関数の導入．
  - 線型汎関数の (弱) 連続性．
  - 線型汎関数の (汎弱) 収束．

これを抽象化するとヒルベルト空間・バナッハ空間の弱収束や汎弱収束の定義です．フーリエ変換まわりの議論をしようとすると $\mathcal{D}(\Omega)$ と $\mathcal{D}(\Omega)^*$ では不十分で, 急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ と緩増加超関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^*$ が必要です．ここではフーリエ変換によるソボレフ空間での弱微分の定義を紹介するだけに留めます.

0.14.4.13 フーリエ変換を使ったソボレフ空間 $H^k(\mathbb{R}^d)$ での弱微分

ソボレフ空間であっても弱微分は超関数と同じように定義します．しかし全空間で考えるとフーリエ変換が使えます．このフーリエ変換を応用した弱微分を紹介します.

ふつうの弱微分は部分積分を使って定式化しました．ここではフーリエ変換による形式的な微分です．関数の可積分性と直接的に関係していて示唆に富む定義です.

まず関数 f がフーリエ変換・逆変換できるとすれば f は次のように書けます.

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(k) e^{ikx}\, dk. \tag{0.14.4.3}$$

これを形式的に x_j で微分しましょう．特に微分と積分の順序が交換できるとすれば次のように書けます.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\hat{f}(k) e^{ikx} \right) dk \tag{0.14.4.4}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} ik_j \left(\hat{f}(k) e^{ikx} \right) dk. \tag{0.14.4.5}$$

ここで最左辺からは微分が消えて積分変数 k_j の積が出てきます.

これを逆に考えましょう．最右辺の積分が存在するならそれをもって最左辺の導関数が定義できるとみなすのです．これがフーリエ変換による超関数

微分です．これは微分を積分に押しつけているのが印象的です．微分を積分に押しつけるのは変分法でも重要な視点です.

0.14.4.14　変分法の数学的ポイント

ソボレフ空間論のポイントでもあります．いろいろな話を積分に押しつけましょう．微分は解析学としては非常に扱いづらい演算ですが, 積分は非常に扱いやすい演算です．現代の関数解析・実解析でも決定的に重要なポイントなので微分方程式の視点からもコメントします.

ハミルトニアン $H = -\Delta + V$ に対する時間依存のないシュレディンガー方程式 $H\psi = E\psi$ で基底状態・基底エネルギーを求めることを考えましょう．このとき両辺に ψ をかけて, ラプラシアンについては部分積分すれば次の方程式が得られます.

$$E = \int_{\mathbb{R}^d} \left(|\nabla \psi(x)|^2 + V(x) |\psi|^2 \right) dx. \tag{0.14.4.6}$$

特に $I(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(|\nabla \psi(x)|^2 + V(x) |\psi|^2 \right) dx$ に対して, 次の最小化問題をを考えるのが変分問題です.

$$E_0(H) = \inf_{\psi \in L^2(\mathbb{R}^d), \|\psi\|_2 = 1} I(\psi). \tag{0.14.4.7}$$

もともとシュレディンガー方程式は二階の偏微分方程式でした．しかし非線型の汎関数 I で ψ は一階微分できれば十分です．つまり微分一階分だけ浮くので解に対する条件がゆるくなっています．冒頭でコメントしたように関数を考える範囲が大きくなると解が探しやすくなります．微分方程式論としての変分問題のご利益はこれです.

もちろん広いところで考えために余計な解が得られてしまって一意性が崩れるかもしれませんし, 一意性があったとしても適当な意味で本来ほしい解ではない可能性もあります．これを排除する議論が必要にはなりますが, 代数方程式であっても同じことです．ここにも高校での代数方程式以来の議論

が使われています. 弱位相や弱収束もこうした微分方程式論を円滑に進めるための概念装置なのです.

0.14.4.15 小まとめ

簡単にどんなポイントがあったかまとめておきましょう.

- 数学を理解したいなら「聖域」に対する理解が不可欠.
  - よくも悪くも面白いと思えるかが勝負.
  - 面白いと思える人が数学者で,「数学のセンス」があると言える.
- 物理学者が持ち込んだ謎概念を数学者がきちんと魔解釈して地獄に仕立てた.
- 位相空間論の一般論・概念: コンパクト性, 弱位相 (位相の強弱), 収束のしやすさ.
- 解の存在と一意性
  - 代数方程式にまつわる事情と同じ.
  - 解を探すには大きな空間に行く.
  - 大きな空間には解があるが, 一つとは限らずたくさんある.
- 線型空間とその双対, 特に位相的双対.
- 微分写像の暴力性, 積分の性質のよさ.
  - 高校の力学を見てもわかる.
  - ついでに言うと積分は不等式も保つ.
- 終わり良ければ全てよし.
  - フーリエ変換による微分の一般化.

超関数をざっと見るだけで学部レベルの解析学はほぼカバーできます. それくらい大変とも言えますし, 超関数論を眺めるだけで解析学のモチベーションはだいたい全てわかってしまうとも言えます. 特に線型代数・位相空間論・実数論という解析学の三つの基本の大事なところが, 極めつけに鬱陶しい形で出てきます.

超関数論自体をきちんと勉強する必要はありません．しかしその概要を知っておくだけでも学部レベルの数学の重要な部分はかなり制圧できるほど, 内容豊富です．ぜひこの視点を持って数学科の数学の聖域に挑んでください.

0.14.4.15.1　勉強会メモ

勉強会での発言メモをつけておきます.

- 聖域:「オタクの聖地」と思った方がしっくり来るかもしれない．興味がある人には効果てきめんだが, そうでない人にはむしろ煙たがられる.
- 強い収束=条件が厳しい=条件が多い=収束しにくい.
- 「それにも関わらず Ω 上の関数で超関数を近似することはできます」: いわゆる埋め込みの系統の話で, 数学全般で大事な視点.
- 位相空間 X の位相が強い=開集合が多い．「位相空間 X を始域とする写像が連続になりやすい」$\Leftrightarrow$「写像 $f\colon X \to Y$ で, Y の任意の開集合 O_Y に対して $f^{-1}(O_Y)$ が常に X の開集合になっていること．空間 X の開集合は大量にあるので $f^{-1}(O_Y)$ はその分開集合になりやすい.
- 収束のしやすさと位相: ノルム空間とフレッシェ空間の比較をすると, ノルム空間は一つのノルムに対する収束だけで決まり, フレッシェ空間は多数のノルムに対する収束を見なければ収束が決まらない．条件の多さは開集合の多さと関係し, これが収束の強さと位相の強弱に関わる.
- 「微分という暴力的な写像」: 微分をすると元の関数の性質が破壊される．比較対象として積分がある: 積分すると一般に関数が滑らかになっていく.
- $T_f(\phi) = \int f(x)\phi(x)\,dx$.
- 「関数列の極限が元の関数の性質を壊す」: 滑らかな関数からなる関

数列の極限がまた滑らかか? 数学としては一様収束・各点収束. 物理の例: 相転移と熱力学的極限.

- ネットの極限・フィルターの極限: チコノフの定理, コンパクト集合の (任意の無限) 直積が (適当な位相の定義のもとで) コンパクト.
- 超関数の空間はフレッシェ空間.
- 積分が扱いやすい理由の一つ: いろいろな積分不等式がある. ヘルダー・ミンコフスキー, ポアンカレの不等式などなど. すべての x で $f(x) \leq g(x)$ なら $\int f \leq \int g$. 逆に微分は $f \leq g$ でも $f' \leq g'$ とは限らない. (例が作れるか?) むしろ $f \leq g$ で $g' \leq f'$ がありうる.
- 「不等式は重要」何で? 一つは ε-δ 論法:0.14.5 節参照.
- 「大人の高校」という視点が大事.

0.14.4.16 アンケート

毎回アンケートを取っています. 質問や要望がある場合もこちらにどうぞ.

- アンケートへのリンク

アンケートは匿名なので気楽にコメントしてください. 直接返事してほしいことがあれば, メールなど適当な手段で連絡してください. 返事は確約できませんが, 適当な手段でコンテンツに反映させます.

0.14.4.17 節終了

参考文献

[1] 明出伊類似, 尾畑伸明. 『量子確率論の基礎』. 牧野書店, 9 2003.

[2] Robert A. Adams and John J.F. Fornier. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 10 2012.

[3] L. V. Ahlfors, 乾吉笠原. 『複素解析』. 現代数学社, 3 1982.

[4] M. Aigner and G. Ziegler. 『天書の証明』. 丸善出版, 9 2012.

[5] 赤池弘次. エントロピーとモデルの尤度. 日本物理學會誌, Vol. 35, No. 7, pp. 608–614, 1980.

[6] 赤池弘次. 統計的推論のパラダイムの変遷について. 統計数理研究所彙報, Vol. 27, No. 1, pp. 5–12, 1980.

[7] 秋月康夫. 『輓近代数学の展望』. 筑摩書房, 12 2009.

[8] Herbert Alexander and John Wermer. *Several Complex Variables and Banach Algebras*. Springer, 10 2013.

[9] F. J. Almgren and E. Lieb. *Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continuous*, Vol. 2. 2 1989.

[10] Allen Altman and Steven Kleiman. *A Term of Commutative Algebra*. Worldwide center of mathematics, 4 2013.

[11] 青木貴史, 山崎晋, 片岡清臣. 『超函数・FBI 変換・無限階擬微分作用素』. 共立出版, 6 2004.

[12] 青柳碧人. 『浜村渚の計算ノート』. 講談社, 6 2011.

[13] 青柳碧人. 『浜村渚の計算ノート (1) 』. 講談社, 11 2013.

[14] A. Arai and M. Hirokawa. On the existence and uniqueness of ground states of generalized spin-boson model. *J. Funct. Anal.*, Vol. 151, pp. 455–503, 1997.

[15] Asao Arai. Infinite dimensional analysis and analytic number theory. *Acta Applicandae Mathematica*, Vol. 63, pp. 41–78, 9 2000.

[16] 新井朝雄, 江沢洋. 『場の量子論と統計力学』. 日本評論社, 6 1988.

[17] 新井朝雄, 江沢洋. 『量子力学の数学的構造 II』. 朝倉書店, 7 1999.

[18] 新井朝雄, 江沢洋. 『量子力学の数学的構造 I』. 朝倉書店, 7 1999.

[19] 新井朝雄. 『フォック空間と量子場 上』. 数理物理シリーズ. 日本評論社, 8 2000.

[20] 新井朝雄. 『フォック空間と量子場 下』. 数理物理シリーズ. 日本評論社, 8 2000.

[21] 新井朝雄. 『量子現象の数理』. 朝倉物理学体系. 朝倉書店, 2 2006.

[22] 新井朝雄. 『物理の中の対称性–現代数理物理学の観点から』. 日本評論社, 1 2008.

[23] 新井朝雄. 『量子統計力学の数理』. 共立出版, 7 2008.

[24] 新井朝雄. 『量子数理物理学における汎関数積分法』. 共立出版, 8 2010.

[25] 新井朝雄. 『ヒルベルト空間と量子力学 改訂増補版』. 共立出版, 7 2014.

[26] AraiAsao and HirokawaMasao. Ground states of a general class of quantum field hamiltonians. *Reviews in Mathematical Physics*, Vol. 12, pp. 1085–1135, 2000.

[27] H. Araki and E. J. Woods. Representations of the canonical commutation relations describing a nonrelativistic infinite free bose gas. *J. Math. Phys.*, Vol. 4, pp. 637–662, 1963.

[28] 荒木不二洋. 『量子場の数理』, 岩波講座 現代の物理学. 岩波書店, 1 1993.

[29] Thierry Aubin. *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geome-*

try. Springer, 6 1998.

[30] Steve Awodey. *Category Theory*. Oxford Univ Pr, 8 2010.

[31] 東野圭吾. 『探偵ガリレオ』. 文藝春秋, 2 2002.

[32] 東野圭吾. 『容疑者 X の献身』. 文藝春秋, 8 2008.

[33] 東野圭吾. 『容疑者 x の献身 スタンダード・エディション [dvd] 』, 3 2009.

[34] V. Bach, J.Fröhlich, I. M. Sigal. Quantum electrodynamics of confined nonrelativistic particles. *Adv. Math*, Vol. 137, pp. 299–395, 1998.

[35] Augustin Banyaga and David Hurtubise. *Lectures on Morse Homology*. Springer, 10 2004.

[36] H. Baumgartel. *Operator Algebraic Methods in Quantum Field Theory*. Vch Pub, 10 1995.

[37] Vladimir Berkovich. *Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-Archimedean Fields*. American Mathematical Society, 8 2012.

[38] B. Blackadar. *K-Theory for Operator Algebras*. Cambridge University Press, 9 1998.

[39] Vladimir I. Bogachev. *Measure Theory*. Springer, 11 2006.

[40] Hans JürgenBorchers. Quantum field theory as dynamical system. *LQP archive*, pp. 1–19, 2002.

[41] Hans JürgenBorchers. *Translation Group and Particle Representations in Quantum Field Theory*. Springer, 4 2014.

[42] O. Bratteli and D. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Vol. 1 of *Theoretical and Mathematical Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 11 2010.

[43] O. Bratteli and D. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Vol. 2 of *Theoretical and Mathematical Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 7 2013.

[44] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differ-*

ential Equations. Springer, 11 2011.

[45] H. Brezis, 宏藤田, 芳雄小西. 『関数解析-その理論と応用に向けて』. 産業図書, 10 1988.

[46] J. Brothers and W. P. Ziemmer. Minimal rearrangements of sobolev functions. *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 384, pp. 153–179, 1988.

[47] D. Buchholz and H. Grundling. Quantum systems and resolvent algebras. *arXiv:13060860*, pp. 1–15, 6 2013.

[48] Sebastiano Carpi, Robin Hillier, Yasuyuki Kawahigashi, and Roberto Longo. Spectral triples and the super-virasoro algebra. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 295, pp. 71–97, 2010.

[49] Sebastiano Carpi, Yasuyuki Kawahigashi, Roberto Longo, and Mihaly Weiner. From vertex operator algebras to conformal nets and back. *Mem. Amer. Math. Soc.*, Vol. to appear, pp. 1–46, 2015.

[50] Henri Cartan. *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables.* Dover, 7 1995.

[51] 遅塚忠躬. 『フランス革命 歴史における劇薬』. 岩波書店, 12 1997.

[52] S C Coutinho. *A Primer of Algebraic D-Modules.* Cambridge University Press, 5 1995.

[53] David A. Cox, John Little, and Donal O'shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra.* Springer, 11 2010.

[54] Michael G. Crandall, Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 27, pp. 1–67, 1992.

[55] Keenan Crane, Fernando de Goes, Mathieu Desbrun, and Peter Schroder. Digital geometry processing with discrete exterior calculus. p. 145, 2 2018.

[56] Georges de Rham. *Differentiable Manifolds: Forms, Currents, Harmonic Forms.* Spinger-Verlag, 10 2011.

[57] Amir Dembo and Ofer Zeitouni. *Large Deviations Techniques and Applications*. Springer, 2009.

[58] J. Dereziński. Introduction to representations of the canonical commutation and anticommutation relations. *arXiv:math-ph/0511030v2*, pp. 1–79, 2005.

[59] J. Dereziński and V. Jakšić. Spectral theory of pauli-fierz operators. *J. Func. Anal.*, pp. 243–327, 2001.

[60] J. Dereziński, V. Jakšić, and A. Pillet. Perturbation theory of w^*-dynamics, liouvilleans and kms-states. *Rev. Math. Phys*, Vol. 15, pp. 447–489, 2003.

[61] Jared Diamond. 『銃・病原菌・鉄 (上) 1 万 3000 年にわたる人類史の謎』. 草思社, 2 2012.

[62] DiamondJared. 『銃・病原菌・鉄 (下) 1 万 3000 年にわたる人類史の謎』. 草思社, 2 2012.

[63] Paul M. Dirac, 洋江沢. 『一般相対性理論』. 筑摩書房, 12 2005.

[64] Simon Donaldson. *Riemann Surfaces*. Oxford University Press, 5 2011.

[65] W. Dunham, 重雄一樂, 敏實川. 『微積分名作ギャラリ–ニュートンからルベーグまで』. 日本評論社, 11 2009.

[66] W. Dybalski. Spectral theory of automorphism groups and particle structures in quantum field theory. *arxiv:0901.3127v1*, 2009.

[67] A. Einstein. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der Physik*, Vol. 322, pp. 891–921, 7 1905.

[68] David Eisenbud and Joe Harris. *The Geometry of Schemes*. Springer, 12 1999.

[69] Richard Ellis. *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 11 2005.

[70] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 4 2010.

[71] 江沢洋. 『力学—高校生・大学生のために』. 日本評論社, 2 2005.

[72] 江沢洋. 『だれが原子をみたか』. 岩波書店, 1 2013.

[73] Otto Forster. *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer, 10 2013.

[74] Theodore Frankel. *The Geometry of Physics: An Introduction*. Cambridge University Press, 11 2003.

[75] 藤岡敦. 『具体例から学ぶ多様体』. 裳華房, 3 2017.

[76] 藤原正彦. 『天才の栄光と挫折—数学者列伝』. 文藝春秋, 9 2008.

[77] 深谷賢治. 『数学者の視点』. 岩波書店, 1 1996.

[78] 深谷賢治. 『電磁場とベクトル解析』. 岩波書店, 1 2004.

[79] 舟木直久. 『確率論』. 朝倉書店, 11 2004.

[80] 学研教育出版. 『中 1 英語・数学・国語・理科・社会 (セシルマクビー スタディコレクション)』. 学研マーケティング, 8 2015.

[81] 学研教育出版. 『中 2 英語・数学・国語・理科・社会 (セシルマクビー スタディコレクション)』. 学研マーケティング, 8 2015.

[82] 学研教育出版. 『中 3 高校入試 英語・数学・国語・理科・社会 (セシルマクビー スタディコレクション)』. 学研マーケティング, 8 2015.

[83] B. Gelbaum and J. Olmsted. *Counterexamples in Analysis*. Dover, 6 2003.

[84] Howard Georgi. 『物理学におけるリー代数アイソスピンから統一理論へ』. 吉岡書店, 10 2010.

[85] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 4 2013.

[86] Robert C. Gunning. *Lectures on Riemann Surfaces, Jacobi Varieties*. Princeton University Press, 3 2015.

[87] Rudolf Haag. *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. Springer, 1996.

[88] 芳賀和夫. 『オリガミクス 幾何図形折り紙』, 第 1 巻. 日本評論社, 10 1999.

[89] Richard Hamilton. The inverse function theorem of nash and

moser. *Bull. Amer. Math. Soc*, Vol. 7, pp. 65–222, 1982.

[90] 田崎晴明, 原隆. 『相転移と臨界現象の数理』. 共立出版, 6 2015.

[91] G. Hardy and J. Littlewood. 『不等式』. シュプリンガーフェアラーク東京, 8 2012.

[92] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer, 4 1997.

[93] 長谷川浩司. 『線型代数』. 日本評論社, 3 2015.

[94] 服部哲弥. 『Amazon ランキングの謎を解く確率的な順位付けが教える売上の構造』. 化学同人, 5 2011.

[95] Friedrich W. Hehl and Yuri N. Obukhov. *Foundations of Classical Electrodynamics: Charge, Flux, and Metric*. Springer, 8 2003.

[96] Lester L. Helms. *Potential Theory*. Springer, 6 2009.

[97] 日合文雄, 柳研二郎. 『ヒルベルト空間と線型作用素』. 牧野書店, 7 1995.

[98] 平井武. 『線形代数と群の表現 II 』. 朝倉書店, 11 2001.

[99] 平井武. 『線形代数と群の表現 I』. 朝倉書店, 11 2001.

[100] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press, 3 2012.

[101] 堀畑和弘, 長谷川浩司. 『常微分方程式の新しい教科書』. 朝倉書店, 2016.

[102] 堀田昌寛. 『入門 現代の量子力学量子情報・量子測定を中心として』. 講談社, 7 2021.

[103] 堀田良之. 『加群十話—代数学入門』. 朝倉書店, 10 1988.

[104] LarsHörmander. A history of existence theorems for the cauchy-riemann complex in l^2 spaces. *Journal of Geometric Analysis*, Vol. 13, No. 2, pp. 329–357, 2 2003.

[105] 一樂重雄. 『集合と位相 そのまま使える答えの書き方』. 講談社サイエンティフィク, 4 2001.

[106] 伊原康隆. 『志学数学 研究の諸段階 発表の工夫』. 丸善出版, 7 2012.

[107] 磯崎洋. 『多体シュレーディンガー方程式』. 丸善出版, 2012.

[108] 伊藤清三. 『ルベーグ積分入門』. 裳華房, 4 1963.

[109] 岩永恭雄, 佐藤眞久. 『環と加群のホモロジー代数的理論』. 日本評論社, 10 2002.

[110] M. Kac, 陽一郎高橋, 眞澄中嶋. 『Kac 統計的独立性』. 数学書房, 4 2011.

[111] Mark Kac. Can one hear the shape of a drum? *American Mathematical Monthly*, Vol. 73, pp. 1–23, 1966.

[112] 嘉田勝. 『論理と集合から始める数学の基礎』. 日本評論社, 12 2008.

[113] R. Kadison and J. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras.* American Mathematical Society, 7 1997.

[114] R. Kadison and J. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras: Advanced Theory.* American Mathematical Society, 7 1997.

[115] 金谷健一. 『これなら分かる応用数学教室-最小二乗法からウェーブレットまで』. 共立出版, 6 2003.

[116] Ioannis Karatzas and Steven Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer, 8 1991.

[117] 笠原乾吉. 『複素解析 1 変数解析関数』. 筑摩書房, 8 2016.

[118] 柏原正樹, 河合隆裕, 木村達雄. 『代数解析学の基礎』. 紀伊国屋, 11 2008.

[119] 柏原正樹. 『代数解析概論』. 岩波書店, 3 2008.

[120] 桂利行. 『代数幾何入門』. 共立出版, 10 1998.

[121] 桂利行. 『代数学 II 環上の加群』. 東京大学出版会, 3 2007.

[122] 川北稔. 『砂糖の世界史』, 岩波ジュニア新書. 岩波書店, 7 1996.

[123] 川村みゆき. 『多面体の折紙正多面体・準正多面体およびその双対』. 日本評論社, 11 1995.

[124] 川添愛. 『白と黒のとびらオートマトンと形式言語をめぐる冒険』. 東京大学出版会, 4 2013.

[125] 圏論の歩き方委員会. 『圏論の歩き方』. 日本評論社, 9 2015.

[126] S. Khaleelulla. *Counterexamples in Topological Vector Spaces*. Springer Berlin Heidelberg, 7 1982.

[127] 金成煥, 山本昌宏. 『熱方程式で学ぶ逆問題 Fourier 解析関数解析から数値解析まで』. サイエンス社, 3 2008.

[128] 木村達雄. 『佐藤幹夫の数学』. 日本評論社, 9 2014.

[129] 北原晴夫, 河上肇. 『調和積分論』. 近代科学社, 9 1991.

[130] Shoshichi None Kobaashi and Katsumi None Nomizu. *Foundations of Differential Geometry I*. Wiley, 2 1996.

[131] 小林昭七. 『複素幾何』. 岩波書店, 9 2005.

[132] 小林昭七. 『顔をなくした数学者–数学つれづれ』. 岩波書店, 7 2013.

[133] 小林俊行, 大島利雄. 『リー群と表現論』. 岩波書店, 4 2005.

[134] 小平邦彦. 『新・数学の学び方』. 岩波書店, 1 2015.

[135] 小平邦彦. 『複素多様体論』. 岩波書店, 1 2015.

[136] 国立天文台. 『理科年表 平成 25 年版 机上版』. 丸善出版, 11 2013.

[137] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin. *Introductory Real Analysis*. Dover, 6 1975.

[138] 小松彦三郎. 『佐藤超函数論入門』. 数理解析研究所講究録, pp. 1–174, 10 1973.

[139] 今野浩. 『カーマーカー特許とソフトウェア-数学は特許になるか』. 中央公論社, 12 1995.

[140] 今野宏. 『微分幾何学』. 東京大学出版会, 10 2013.

[141] ことりん. 『偏微分方程式のお話 解の存在について』. 関西すうがく徒のつどい, pp. 1–25, 3 2012.

[142] Amy Langville, Carl Meyer, 和生岩野, 利明黒川, 洋黒川. 『 Google PageRank の数理-最強検索エンジンのランキング手法を求めて-』. 共立出版, 10 2009.

[143] F. William Lawvere and Robert Rosebrugh. *Sets for Mathematics*. Cambridge University Press, 4 2003.

[144] Tom Leinster. Rethinking set theory. p. 8, 2012.

[145] Ulf None Leonhardt and Thomas G. Philbin. Transformation optics and the geometry of light. *arxiv*, p. 72, 7 2008.

[146] E. H. Lieb and M. Loss. *Analysis*. Amer. Math. Soc., 4 2001.

[147] E. H. Lieb and R. Seiringer. *The Stability of Matter in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 11 2009.

[148] E. H. Lieb, R. Seiringer, J. Solovej, and J. Yngvason. *The Mathematics of the Bose Gas and its Condensation (Oberwolfach Seminars)*. Birkhaeuser Basel, 7 2005.

[149] E. H. Lieb and B. Simon. Thomas-fermi theory of atoms, molecules and solids. *Adv. in Math.*, Vol. 23, pp. 22–116, 1977.

[150] E. H. Lieb and J. Yngvason. The physics and mathematics of the second law of thermodynamics. *arXiv:cond-mat/9708200*, p. 101, 8 1997.

[151] E. H. Lieb and J. Yngvason. The entropy concept for non-equilibrium states. *arxiv:1305.3912*, pp. 1–23, 2013.

[152] Elliot H. Lieb. The stability of matter: from atoms to stars. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 22, No. 1, pp. 1–49, 1990.

[153] Elliot H. Lieb. *Quantum Mechanics, The Stability of Matter and Quantum Electrodynamics*. arXiv, 1 2004.

[154] J.Lörinczi, F. Hiroshima, V. Betz. *Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space: With Applications to Rigorous Quantum Field Theory*. Walter De Gruyter, 6 2011.

[155] J.Lörinczi, R. A. Minlos, Herbert Sphon. Infrared regular representation of the three-dimensional massless nelson model. *Lett. Math. Phys.*, Vol. 59, pp. 189–198, 3 2002.

[156] 松本幸夫. 『多様体の基礎』. 岩波書店, 9 1988.

[157] 松島与三. 『多様体入門』. 裳華房, 4 2017.

[158] 松坂和夫. 『集合・位相入門』. 岩波書店, 6 1968.

[159] John Milnor. *Morse Theory.* Princeton University Press, 1963.

[160] John Willard Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint.* Princeton Univ Pr, 11 1997.

[161] 三ツ矢和弘. 『やさしい理系数学』. 河合出版, 7 2013.

[162] 宮島静雄. 『ソボレフ空間の基礎と応用』. 共立出版, 8 2006.

[163] 持橋大地, 大羽成征. 『ガウス過程と機械学習』. 機械学習プロフェッショナルシリーズ. 講談社, 3 2019.

[164] 森本光生. 『復刊 佐藤超函数入門』. 共立出版, 9 2000.

[165] 森田茂之. 『微分形式の幾何学』. 岩波書店, 10 2016.

[166] Mohammad Sal Moslehian. The counterexamples in functional analysis. *On the internet*, 2002.

[167] 向井湘吾. 『お任せ! 数学屋さん 2 』. ポプラ社, 10 2014.

[168] 向井湘吾. 『お任せ! 数学屋さん 3 』. ポプラ社, 10 2015.

[169] 向井湘吾. 『お任せ! 数学屋さん』. ポプラ社, 4 2015.

[170] 肖鋒, 長崎孝夫. 『数値流体解析の基礎 Visual C++ と gnuplot による圧縮性・非圧縮性流体解析』. コロナ社, 1 2020.

[171] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics.* CRC Press, 6 2003.

[172] 中村周. 『量子力学のスペクトル理論』. 共立出版, 7 2012.

[173] 夏目利一, 森吉仁志. 『作用素環と幾何学』. 数学メモワール, 6 2001.

[174] Michael A. Nielsen and Issac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information.* Cambridge University Press, 12 2010.

[175] 西川青季. 『幾何学的変分問題』. 岩波書店, 4 2006.

[176] 西野利雄. 『多変数函数論』. 東京大学出版会, 11 1996.

[177] 登坂宣好, 大西和栄, 山本昌宏. 『逆問題の数理と解法-偏微分方程式の逆解析』. 東京大学出版会, 12 1999.

[178] 野口潤次郎. 『多変数解析関数論学部生へおくる岡の連接定理』. 朝倉書店, 4 2013.

[179] Katsumi Nomizu and Hideki Ozeki. The existence of complete

riemannian metrics. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 12, No. 6, pp. 889–891, 12 1961.

[180] 小田忠雄.『数学の常識・非常識—由緒正しい TEX 入力法』, 第 4 巻. 日本数学会, 5 1999.

[181] 緒方芳子, 小澤登高.『東大数理ビデオアーカイブス』, 12 2009.

[182] 小川洋子.『博士の愛した数式』. 新潮社, 11 2005.

[183] 小川洋子, くりた陸.『博士の愛した数式 (BE ・ LOVE コミックス) 』. 講談社, 2 2006.

[184] 小川洋子.『博士の愛した数式 [DVD] 』. 角川エンタテインメント, 7 2006.

[185] Takeo Ohsawa. *L^2 Approaches in Several Complex Variables: Development of Oka-Cartan Theory by L2 Estimates for the $\bar{\partial}$ Operator.* Springer, 2015.

[186] 小嶋泉.『量子場とミクロ・マクロ双対性』. 丸善出版, 7 2013.

[187] 王城夕紀.『青の数学』. 新潮社, 7 2016.

[188] D'Angelo J. P. *Several Complex Variables and the Geometry of Real Hypersurfaces.* CRC Press, 1 1993.

[189] Scott Pakin. The comprehensive latex symbol list. p. 331, 11 2015.

[190] Lev Pontryagin. 連続群論 上. 岩波書店, 10 1957.

[191] Lev Pontryagin. 連続群論 下. 岩波書店, 5 1958.

[192] Bott Raoul and Tu W. Loring. *Differential Forms in Algebraic Topology.* Springer, 5 1995.

[193] M. Reed and B. Simon. *Functional Analysis.* Methods of Modern Mathematical Physics. Academic Press, 4 1981.

[194] Miles. None Reid. *Undergraduate Algebraic Geometry.* Cambridge University Press, 12 1988.

[195] Lars H ÖRmander. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.* North-Holland Mathematical Library, 1 1990.

[196] John Roe. *Elliptic Operators, Topology, and Asymptotic Methods,*

Second Edition. Chapman and Hall/CRC, 1 1999.

[197] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Publishing Company, 8 2005.

[198] 齋藤元樹, 松本尚浩. Clarkson の不等式の幾つかの証明について. 数理解析研究所講究録, No. 1399, pp. 51–70, 11 2004.

[199] 齋藤毅. 『集合と位相』. 東京大学出版会, 9 2009.

[200] 齋藤正彦. 『線型代数入門』. 東京大学出版会, 3 1966.

[201] Shoichiro Sakai. *C^*-Algebras and W^*-Algebras*. Springer, 12 1997.

[202] Takashi None Sakai. *Riemannian Geometry*. American Mathematical Society, 5 1996.

[203] 坂井秀隆. 『常微分方程式』. 東京大学出版会, 8 2015.

[204] 酒井隆, 小林治, 芥川和雄, 西川青季, 小林亮一. 『幾何学百科 II 幾何解析』. 朝倉書店, 11 2018.

[205] 酒井高司. 『tex 入門』, 2013.

[206] 佐武一郎. 『線型代数学 (新装版) 』. 裳華房, 6 2015.

[207] Mikio Sato. Theory of hyperfunctions i. *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo. Sect. 1, Mathematics, astronomy, physics, chemistry,*, pp. 139–193, 8 1959.

[208] Mikio Sato. Theory of hyperfunctions ii. *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo. Sect. 1, Mathematics, astronomy, physics, chemistry,*, pp. 387–437, 8 1960.

[209] 佐藤健太郎. 『炭素文明論 「元素の王者」が歴史を動かす』. 新潮社, 7 2013.

[210] M. Schwarz. *Morse Homology*. Springer, 10 1993.

[211] 赤攝也. 『実数論講義』. 日本評論社, 6 2014.

[212] Y. Sekine. Magnetism and infrared divergence in a hubbard-phonon interacting system. *arxiv:10082056*, pp. 1–9, 8 2010.

[213] 関根良紹. 『現代数学探険隊』. 相転移プロダクション, 2017.

[214] Jean Pierre Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique.

Annales de l'institut Fourier, Vol. 6, pp. 1–42, 6 1956.

[215] 志賀浩二. 『無限からの光芒 ポーランド学派の数学者たち』. 日本評論社, 4 1988.

[216] 島内剛一. 『数学の基礎』. 日本評論社, 1 1971.

[217] 清水明. 『量子論の基礎-その本質のやさしい理解のために』. サイエンス社, 4 2004.

[218] 清水明. 『熱力学の基礎』. 東京大学出版会, 3 2007.

[219] シンサイモン. 『フェルマーの最終定理』. 新潮社, 5 2006.

[220] シンサイモン. 『暗号解読 上』. 新潮社, 6 2007.

[221] シンサイモン. 『暗号解読 下』. 新潮社, 6 2007.

[222] シンガー I., ソープ J. 『トポロジーと幾何学入門』. 9 1995.

[223] Alan D. Socal. A really simple elementary proof of the uniform boundedness theorem. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 118, No. 5, pp. 450–452, 5 2010.

[224] 相転移 P. 『よくわからない数学 色々な反例で遊ぼう』, 10 2013.

[225] 相転移 P. *Math textbook*. phasetr production, 2014.

[226] 相転移 P. 『現代数学観光ツアー物理のための関数解析探訪』. 相転移プロダクション, 8 2016.

[227] 相転移 P. 『独学のすゝめ 大学受験勉強法あなたが大学受験で失敗・後悔しないために私はなぜあなたにいい大学・難関大に入ってほしいのか』. 相転移プロダクション, 6 2015.

[228] Jordan Stoyanov. *Counterexamples in Probability: Third Edition*. Dover Publications, 9 2013.

[229] R. Streater and A. Wightman. *PCT, Spin and Statistics, and All That*. Princeton Univ. Pr., 12 2000.

[230] 杉浦光夫. 『解析入門 I 』. 東京大学出版会, 3 1980.

[231] 杉浦光夫. 『解析入門 II 』. 東京大学出版会, 4 1985.

[232] 数学のたのしみ編集部. 『数学まなびはじめ 第 1 集』. 日本評論社, 1 2006.

[233] 数学のたのしみ編集部. 『数学まなびはじめ 第 2 集』. 日本評論社, 1 2006.

[234] 数学のたのしみ編集部. 『数学まなびはじめ 第 3 集』. 日本評論社, 7 2015.

[235] 数理科学編集部. 『物理の道しるべ-研究者の道とは何か』. サイエンス社, 5 2011.

[236] George G. Szpiro. 『ケプラー予想』. 新潮社, 4 2005.

[237] 高木貞治. 『定本 解析概論』. 岩波書店, 9 2010.

[238] 高瀬幸一. 『群の表現論序説』. 岩波書店, 5 2013.

[239] 高瀬正仁. 『岡潔—数学の詩人』. 岩波書店, 10 2008.

[240] 高瀬正仁. 『無限解析のはじまり—わたしのオイラー』. 筑摩書房, 7 2009.

[241] 高瀬正仁. 『ガウスの数論 わたしのガウス』. 筑摩書房, 3 2011.

[242] 高瀬正仁. 『近代数学史の成立 解析篇オイラーから岡潔まで』. 東京図書, 6 2014.

[243] 高瀬正仁. 『微分積分学の史的展開ライプニッツから高木貞治まで』. 講談社, 1 2015.

[244] 高瀬正仁. 『微分積分学の誕生デカルト『幾何学』からオイラー『無限解析序説』まで』. SB クリエイティブ, 7 2015.

[245] Masamichi Takesaki. *Theory of Operator Algebras I*. Springer, 2002.

[246] 竹内外史. 『層・圏・トポス—現代的集合像を求めて』. 日本評論社, 1 1978.

[247] 田中尚夫. 『選択公理と数学』. 遊星社, 10 2005.

[248] H. Tasaki. From nagaoka's ferromagnetism to flat-band ferromagnetism and beyond -an introduction to ferromagnetism in the hubbard model. *Progr. Theor. Phys.*, pp. 489–548, 1998.

[249] 田崎晴明. 『数学:物理を学び楽しむために』. On the internet, 2013.

[250] 田崎晴明. 『熱力学–現代的な視点から』. 培風館, 4 2000.

[251] 寺澤順. 『トポロジーへの招待』. 日本評論社, 4 2012.

[252] Gerald Teschl. Mathematical Methods in Quantum Mechanics With Applications to Schrödinger Operators. American Mathematical Society, 11 2014.

[253] 東京大学工学部計数工学科数理情報工学コース. 『数理工学への誘い』. 日本評論社, 9 2002.

[254] 豊田秀樹. 『基礎からのベイズ統計学ハミルトニアンモンテカルロ法による実践的入門』. 朝倉書店, 6 2015.

[255] 坪井俊. 『幾何学 I 多様体入門』. 東京大学出版会, 4 2005.

[256] 土基善文. 『x の x 乗の話』. 日本評論社, 7 2002.

[257] 内村直之. 『古都がはぐくむ現代数学: 京大数理解析研につどう人びと』. 日本評論社, 11 2013.

[258] 植村信子. 『たかが数学, されど数学』. 山形大学, 10 2005.

[259] 梅村浩. 楕円関数論 増補新装版 楕円曲線の解析学. 東京大学出版会, 5 2020.

[260] J. v. Neumann, 徹広重, 健井上, 敏彦恒藤. 『量子力学の数学的基礎』. みすず書房, 11 1957.

[261] John von Neumann. 『ノイマン・コレクション 数理物理学の方法』. ちくま学芸文庫. 筑摩書房, 12 2013.

[262] John von Neumann. 『ノイマン・コレクション 作用素環の数理』. ちくま学芸文庫. 筑摩書房, 1 2015.

[263] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer, 11 1983.

[264] 渡辺澄夫. 『データ学習アルゴリズム』. 共立出版, 7 2001.

[265] 渡辺澄夫. 『代数幾何と学習理論』. 知能情報科学シリーズ. 森北出版株式会社, 4 2006.

[266] 渡辺澄夫. 『ベイズ統計の理論と方法』. コロナ社, 3 2012.

[267] Hermann Weyl. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. Dover Publications, 6 1950.

[268] Hermann Weyl. 『リーマン面』. 岩波書店, 5 2003.

[269] Hermann Weyl. 『空間・時間・物質 上』. ちくま学芸文庫. 筑摩書房, 4 2007.

[270] Hermann Weyl. 『空間・時間・物質 下』. ちくま学芸文庫. 筑摩書房, 4 2007.

[271] Hermann Weyl. 『古典群 不変式と表現』. シュプリンガー数学クラシックス. 丸善出版, 7 2012.

[272] D. Williams, 次郎赤堀, 啓介原, 俊雄山田. 『マルチンゲールによる確率論』. 培風館, 2 2004.

[273] Pauli Wolfgang. *Theory of Relativity*. Dover Publications, 7 1981.

[274] 山本昌宏. 『逆問題入門』. 岩波書店, 1 2002.

[275] 山本義隆, 中村孔一. 『解析力学 I 』. 朝倉書店, 9 1998.

[276] 山本義隆, 中村孔一. 『解析力学 II 』. 朝倉書店, 9 1998.

[277] 山内恭彦, 杉浦光夫. 『連続群論入門』. 培風館, 8 2010.

[278] 山崎隆雄. 『初等整数論 数論幾何への誘い』. 共立出版, 5 2015.

[279] 安田まさえ. 『数学女子 1』. 竹書房, 9 2010.

[280] 保江邦夫. 『量子の道草-方程式のある風景』. 日本評論社, 1 2009.

[281] 吉田伸生. 『ルベーグ積分入門—使うための理論と演習』. 遊星社, 5 2006.

[282] 吉田武. 『素数夜曲 女王陛下の LISP 』. 東海大学出版会, 6 2012.

[283] 吉田洋一. 『ルベグ積分入門』. 筑摩書房, 8 2015.

[284] 吉永正彦. 『周期と実数の 0-認識問題 Kontsevich-Zagier の予想』. 数学書房, 2 2016.

[285] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer Berlin Heidelberg, 8 1996.

[286] Laurence Chisholm Young. *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*. Amer Mathematical Society, 8 2000.

[287] 結城浩. 『数学ガール』. ソフトバンククリエイティブ, 6 2007.

[288] 結城浩, 茉崎ミユキ. 『数学ガール ゲーデルの不完全性定理 1 』. メディアファクトリー, 4 2011.

[289] 結城浩.『数学ガールの秘密ノート/ 式とグラフ』. SB クリエイティブ, 7 2013.

[290] Max Zorn. Characterization of analytic functions in banach spaces. *Annals of Mathematics*, Vol. 46, No. 4, pp. 585–593, 10 1945.

[291] Max Zorn. Derivatives and fréchet differentials. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 52, pp. 133–137, 1946.

[292] アインシュタインアルベルト, 内山龍雄.『相対性理論』. 岩波書店, 11 1988.

[293] キースデブリン, ゲーリーローデン.『数学で犯罪を解決する』. ダイヤモンド社, 4 2008.

[294] ロンハワード.『ビューティフル・マインド』, 9 2012.

[295] エドワードフレンケル.『数学の大統一に挑む』. 文藝春秋, 7 2015.

[296] ダンブラウン.『ダ・ヴィンチ・コード (1 枚組) [dvd] 』, 12 2015.

[297] ダンブラウン, 敏弥越前.『ダ・ヴィンチ・コード 上・中・下巻 3 冊セット』. 角川書店, 3 2006.

[298] ロブ モロー (主演).『ナンバーズ 天才数学者の事件ファイル シーズン 1 コンプリート dvd-box (4 枚組) 』, 6 2009.

[299] 数理科学編集部.『数学の道しるべ-研究者の道とは何か』. サイエンス社, 5 2011.

[300] Paul Busch(著), Pekka Lahti, Juha-PekkaPellonpää, Kari Ylinen. *Quantum Measurement*. Springer, 8 2016.

索引