A Note on the Resolvent Algebra and Functional Integral Approach to the Free Bose Einstein Condensation

Yoshitsugu Sekine
4429sekine@gmail.com

February 2026

Abstract

TODO

Keywords: resolvent algebra, functional integral, Bose-Einstein condensation

Contents

1 Introduction

本稿では物性理論や非相対論的構成的場の量子論における粒子・場相互作用系の理解に向け, 有限温度での相転移に関わる議論を整理する. 特にボース-アインシュタイン凝縮に伴う表現論的および測度論的構造を作用素環と確率論の両側面から明確に記述する.

この背景には著者によるハバード・フォノン相互作用系の解析がある. この系では赤外特異条件のもとで絶対零度では粒子系に対するハバード強磁性を含めた磁性的な性質の発現が示せる一方 [14], 有限温度ではボース場の性質として (物理的にフォノンの BEC が起きないとされている事情は無視して) 数学的にはボース-アインシュタイン凝縮が現れうる [15]. さらに作用素環の一般論 [4] を利用して, ボース場に対して平衡状態の構成から基底状態の存在証明を導く議論も展開できる. 構成的場の量子論の文脈で有限温度の議論は難しい中で, 教科書で議論されている絶対零度と有限温度の統一的な議論を具体的に確認でき, 物理的な意義も合わせ持つ優れた玩具模型・可解模型である. 同様の議論を他の粒子・場の相互作用系でも展開したい.

しかし相互作用模型では, 有限温度であっても赤外発散の処理が不可避で, その結果としてボース-アインシュタイン凝縮に伴う構造の議論が技術的な困難の中に埋もれてしまう. このため秩序変数の出現や状態の分解構造といった本質的な現象の明確な形での抽出が難しい.

この困難を一旦切り離すため, 本稿では最も基本的な状況である自由ボース気体に立ち戻る. 自由系では赤外発散に起因する複雑性が消滅する一方, ボース-アインシュタイン凝縮に伴う秩序変数の出現, 状態の直積分分解, それに対応する確率論の構造・測度のエルゴード分解といった本質的構造が現れる. したがってこれらの明確な定式化が相互作用系の理解に向けた基礎を与える. 特に物性理論・量子統計力学への応用としても極めて重要である.

本稿ではこれらの構造を作用素環と汎関数積分の対応として捉える. 具体的にはレゾルベント環 [6] による代数的定式化のもとで BEC 状態の表現論的構造を記述し, その直積分分解と汎関数積分 [13, 12, 9] での測度の分解との対応を明示する. この対応は有限温度でのボース-アインシュタイン凝縮を厳密な枠組みの中で理解するための基本的な手がかりを与える. 特に著者が知る限り, 汎関数積分によるボース-アインシュタイン凝縮の記述は既存の文献で見かけないため, これは新しい結果でありうる. レゾルベント環に対して相互作用模型でのボース-アインシュタイン凝縮の既存の結果もいくつかある一方, 直積分分解やクラスター性を明確に記述した文献は見受けられない. さらに生成消滅作用素を直接利用した秩序変数による記述はあるものの [7], レゾルベント環の中で閉じた議論は見かけないため, この点も新しい結果でありうる. さらに代数的場の量子論 [11] ではよく議論される一方, 量子統計力学 [3, 4] や構成的場の量子論 [1, 9] ではあまり詳しい議論を見かけない C^*-環的な定式化・フォン・ノイマン環的な定式化の差異に関して, 相転移の記述力の観点からの議論を補足する.

本稿で得られる結果は直接的には自由ボース気体に関する結果である一方, その意義は粒子・場の相互作用系での議論を明確化する点にある. ここでの議論は相互作用模型における赤外特異性のもとでの解析に先立ち, 問題の本質を切り出す基礎として位置づけられる.

2 Main Results

2.1 Definitions

基本的な複素ヒルベルト空間とその実部分空間を

$$\mathcal{H} = L^2\left(\mathbb{R}^d\right), \quad \mathcal{H}_{\mathrm{real}} = L^2_{\mathrm{real}}\left(\mathbb{R}^d\right) = L^2\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}\right)$$

とする. 正の実数 $s > 0$ に対して波数空間で定義された一粒子ハミルトニアンを $h(k) = |k|^s$, 非正の化学ポテンシャル $\mu \leq 0$ に対して定義された非負自己共役作用素を $K_{\beta,\mu} = \coth \frac{\beta(h-\mu)}{2}$ とし, これに付随する非退化な非負対称準双線型形式 $\mathsf{q}_{\mathrm{nz},\mu}$ に対して, 付随する内積空間とその完備化を

$$\mathcal{D}_{\beta,\mu} = \left(Q\left(\mathsf{q}_{\mathrm{nz},\mu}\right), \mathsf{q}_{\mathrm{nz},\mu}\right), \quad \mathcal{H}_{\beta,\mu} = \overline{\mathcal{D}_{\beta,\mu}}^{\mathsf{q}_{\mathrm{nz},\mu}}$$

とする.

2.2 ボース-アインシュタイン凝縮に関わる量

ここでは詳しい定義は後述する．逆温度 $\beta > 0$ での凝縮体の密度を $\rho_0(\beta)$ とする．凝縮成分に対応する非閉の非負対称双線型形式を

$$\mathsf{q}_0(f) = 2(2\pi)^d \rho_0(\beta) \left|\widehat{f}(0)\right|^2, \quad Q(\mathsf{q}_0) = L^1\left(\mathbb{R}^d\right) \cap L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$$

として部分空間 $\mathcal{D}_{0,\beta,\mu} = Q(\mathsf{q}_0) \cap \mathcal{H}_{\beta,\mu}$ を定める．化学ポテンシャル μ の値が特別な意味を持たないとき, または $\mu = 0$ のときは上記の各対象から化学ポテンシャルの添字を除く．さらに任意の $f \in \mathcal{D}_{0,\beta}$ に対して準双線型形式

$$\mathsf{q}_{\mathrm{BEC}}(f) = \mathsf{q}_0(f) + \mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(f)$$

を定める．

2.3 ワイル環とレゾルベント環

複素ヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ とし, 双線型写像 σ を

$$\sigma \colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}; \quad \sigma(f,g) = \mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}}$$

とする．任意の $f, g \in \mathcal{H}$ に対して生成元 $W(f)$ がワイル関係式

$$\begin{aligned} W(f)^* &= W(-f), \\ W(f)W(g) &= \mathsf{e}^{-\frac{\mathsf{i}}{2}\mathrm{Im}\langle f,\, g\rangle_{\mathcal{H}}} W(f+g) \end{aligned} \tag{1}$$

をみたすような C^*-環

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{H}, \sigma) = \mathcal{W}(\mathcal{H}) = C^*\left\{W(f) \,|\, f \in \mathcal{H}\right\}$$

をワイル環と言う．誤解の恐れがない限り, ワイル環はその時々で適切な略記を利用する．全ヒルベルト空間ではなく適切な部分空間を指定する場合があり, 全ヒルベルト空間に対するワイル環を全ワイル環とも言う．

ワイル環 $\mathcal{W}(\mathcal{H})$ の表現を $(\mathcal{H}_\pi, \pi)$ とする．任意の $f \in \mathcal{H}$ に対してユニタリ群 $t \in \mathbb{R} \to \pi(W(tf))$ が強連続であるとき, この表現 $(\mathcal{H}_\pi, \pi)$ は正則表現と言う．ワイル環 $\mathcal{W}(\mathcal{H})$ の状態 ω はその GNS 表現が正則であるとき正則状態と言う．さらに前ヒルベルト空間 $\mathcal{D}$ 上のワイル環を $\mathcal{W}(\mathcal{D})$ とする．ワイル環の表現 $(\mathcal{H}, \pi)$ が任意の $f \in \mathcal{D}$ に対して $\mathbb{R} \ni t \mapsto \pi(W(tf))$ は強連続であるとき, この表現を正則表現と言う．さらにワイル環上の状態 ω に対してその GNS 表現が正則表現であるとき, 状態 ω を正則状態と言う．

論文 [6] に沿ってレゾルベント環の定義と基本的な性質を紹介する．シンプレクティック空間を (X, σ) とする．集合

$$\left\{R(\lambda, f) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}^\times, f \in \mathcal{H}\right\}$$

が生成する普遍な単位的 $*$-代数を $\mathcal{R}_0$ とし, 特に次のレゾルベント関係式

$$R(\lambda, 0) = -\frac{\mathsf{i}}{\lambda}1, \tag{2}$$
$$R(\lambda, f)^* = R(-\lambda, f), \tag{3}$$
$$\nu R(\nu\lambda, \nu f) = R(\lambda, f), \tag{4}$$
$$R(\lambda, f) - R(\mu, f) = \mathsf{i}(\mu - \lambda)R(\lambda, f) \cdot R(\mu, f) \tag{5}$$
$$= \mathsf{i}(\mu - \lambda)R(\mu, f) \cdot R(\lambda, f), \tag{6}$$
$$[R(\lambda, f),\, R(\mu, g)] = \mathsf{i}\sigma(f,g)R(\lambda, f)R(\mu, g)^2 R(\lambda, f), \tag{7}$$
$$R(\lambda, f)R(\mu, g) = R(\lambda + \mu, f + g) \cdot \big(R(\lambda, f) \tag{8}$$
$$+R(\mu, g) + \mathsf{i}\sigma(f,g)R(\lambda, f)^2 R(\mu, g)\big) \tag{9}$$

をみたすとする．特に条件(7)によって f が等しい $R(\lambda, f)$ と $R(\mu, f)$ は可換である．

この $\mathcal{R}_0$ に適切なノルムを導入した $*$-代数を抽象的レゾルベント環, または単にレゾルベント環と言う．ノルムについて詳しくは定義 [8, P.2730, Definition 3.4] を参照すること．特に定理 [8, P.2730, Theorem 3.6 (iii)] によって

$$\|R(\lambda, f)\| = \frac{1}{|\lambda|}$$

が成り立つ．

稠密な部分環として $\mathcal{R}(\mathcal{H}, \sigma)$ の生成元 $R(\lambda, f)$ の有限個の要素の積が生成する $*$-部分環を選び, 特に記号では

$$\mathcal{R}_{\mathrm{fin}} = *\text{-alg}\left\{ \prod^{\mathrm{fin}} R(z_j, f_j) \,\middle|\, z_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, f_j \in X \right\}$$

のように表す．さらに $\mathcal{H}$ を $\operatorname{dom} \mathsf{m}$ に制約したときの $*$-部分環は特に $\mathcal{R}_{\mathrm{fin}}(\operatorname{dom} \mathsf{m}, \sigma)$ で表す．自由ボース気体のボース-アインシュタイン凝縮やファン・ホーフェ模型の議論では第一変数が長くなり, 第二変数との境がわかりにくい場合があるため, 状況に応じて変数の区切りとしてセミコロンを利用して

$$R(\lambda; f)$$

のように書く場合がある．

通常のレゾルベントではよく知られているようにレゾルベントは第一変数に対して解析的である．これを利用してレゾルベント環の $\lambda \in \mathbb{R}$ を複素変数 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\mathbb{R}$ に拡張した関係式

$$\begin{aligned}
R(z, 0) &= -\frac{\mathsf{i}}{z} 1, && (10)\\
R(z, f)^* &= R(-\overline{z}, f), && (11)\\
\nu R(\nu z, \nu f) &= R(z, f), \quad \nu \in \mathbb{R}^\times, && (12)\\
R(z, f) - R(w, f) &= \mathsf{i}(w - z) R(z, f) \cdot R(w, f) && (13)\\
&= \mathsf{i}(w - z) R(w, f) \cdot R(z, f), && (14)\\
[R(z, f),\, R(w, g)] &= \mathsf{i}\sigma(f, g) R(z, f) R(w, g)^2 R(z, f), && (15)\\
R(z, f) R(w, g) &= R(z + w, f + g) \cdot \big(R(z, f) && (16)\\
&\quad + R(w, g) + \mathsf{i}\sigma(f, g) R(z, f)^2 R(w, g)\big) && (17)
\end{aligned}$$

が得られ, これもやはりレゾルベント関係式と言う．

レゾルベント環を $\mathcal{R}(X, \sigma)$ とし, シンプレクティック空間 X の部分集合を S とする．表現 $\pi \in \operatorname{Rep}(\mathcal{R}(X, \sigma), \mathcal{H}_\pi)$ が任意の $f \in S$ に対して $\operatorname{Ker} \pi(R(1, f)) = \{0\}$ をみたすとき, この表現を S 上の正則表現と言う．レゾルベント環上の状態 ω の GNS 表現が X 上の正則表現であるとき, この状態を正則状態と言う．

Proposition 2.1. 任意の次元のシンプレクティック空間 (X, σ) に対して $S \subset X$ を非縮退の有限次元空間とする．

1. 全レゾルベント環 $\mathcal{R}(X, \sigma)$ と部分環 $\mathcal{R}(R, \sigma)$ のノルムは $*$-部分環

$$*\text{-alg}\,\{R(\lambda, f) \,|\, f \in S, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

上で一致する．特に $\mathcal{R}(S, \sigma) \subset \mathcal{R}(X, \sigma)$ が成り立つ．

2. 全レゾルベント環は非縮退な有限次元空間 $S \subset X$ に対するネット $\{\mathcal{R}(S, \sigma)\}_{X \subset S}$ の帰納極限である．

3. 全レゾルベント環 $\mathcal{R}(X, \sigma)$ の任意の正則表現は忠実である．

特に全レゾルベント環の中心は自明である．

2.4 Theorems

結果自体は明らかなため, 正確な言明は後述するとし, ここでは大まかな言明を定式化する. 詳しい定義は後述するとして, 論文 [8] で定式化されたレゾルベント環を考える.

Proposition 2.2. シーガルの場の作用素のレゾルベントによってボース-アインシュタイン凝縮に対する秩序変数が定義できる. 特にその値によって C^*-環の水準でボース-アインシュタイン凝縮の発現が完全に記述できる.

以下ボース-アインシュタイン凝縮が発現している状況を考える.

Theorem 2.3. 準双線型形式 $\mathsf{q}_{\mathrm{BEC}}$ に付随する表現としてレゾルベント環の表現が構成できる. 特に q_{nz} に付随する表現はレゾルベント環に対する荒木-ウッズ表現で, q_0 に付随する表現によって全体の表現は荒木-ウッズ表現の直積分として書ける. この表現でレゾルベント環の中心は自明である一方, 弱閉包であるフォン・ノイマン環は q_0 に対応する非自明な中心を持つ.

この作用素環の直積分は汎関数積分でも記述できる.

Corollary 2.4. 作用素環の直積分分解は汎関数積分では正則条件つき確率測度によるエルゴード分解で記述できる.

Remark 2.5 (BEC 表現はどうあるべきか). C^*-環を連続関数環の非可換化とみなし, この連続性・ノルム位相を量子的なゆらぎ・鈍りとみなせば C^*-環は純量子系に対応する. 一方で射影を大量に含むフォン・ノイマン環は精密な測定を許すと思えば古典系に対応する. この議論からすれば, 古典成分に対応するべき環の中心がレゾルベント環に含まれるのは不自然で, 実際にレゾルベント環の一般論 [6] によって全レゾルベント環は中心を持たない. 同じく一般論によって物理的な表現としての正則表現は忠実で, やはり中心はない. つまり BEC 表現でも C^*-環としての表現が中心分解としての直積分分解を持つのは不健全である.

C^*-環としては $\mathcal{D}_{0,\beta}$ 上で定義するか, $\mathcal{H}_\beta$ 上で定義するかで得られる環が異なる. 一方, フォン・ノイマン環では $\mathcal{D}_{0,\beta}$ を採用して定義しても, 強閉包で $\mathcal{H}_\beta$ 上の環に帰着する. したがって $\mathcal{D}_{0,\beta}$ は古典成分である q_0 を見るために設定した補助的な空間であるべきであろう. 無限体積極限を考える場合も, 局所環の議論では $\mathcal{H}_\beta$ 相当の空間指定だけで話が閉じる. 無限系の細部に関するイデアル構造・特異性に関する形で, 正則部分空間の一つとして $\mathcal{D}_{0,\beta}$ が採用される立て付けが正しくあるべきであろう. フォン・ノイマン環で中心を見るときにも注意するべき視点である.

実際には作用素環に依存せず, 直接的に汎関数積分でボース-アインシュタイン凝縮が記述できる. これは5節で議論する.

2.5 Further Results

イントロダクションでも紹介した通り, ファン・ホーフェ模型の絶対零度は教科書 [1] で詳しく議論されている. ハバード・フォノン相互作用系 [14, 15] は場の振る舞いに関して本質的にファン・ホーフェ模型と等価で, この議論を応用すれば, ファン・ホーフェ模型に対して作用素環的な有限温度の議論には対応できる. ファン・ホーフェ模型に対する具体的な記述は次のプレプリントとして準備中である. さらに少なくとも絶対零度での赤外発散処理に関して, 例えば汎関数積分法 [13] によってファン・ホーフェ模型で検出された挙動はスピン-ボソン模型・ネルソン模型とも共通である. ボース-アインシュタイン凝縮を除いてスピン-ボソン模型の有限温度の議論は文献 [10] で既に議論されている.

論文 [12] や教科書 [9] で議論された作用素環と汎関数積分 (確率過程) の同値性に関して, ボース-アインシュタイン凝縮型の相転移が発現した状況下で, 作用素環での直積分分解と汎関数積分での正則条件つき確率測度のエルゴード分解の同値性の一般的な定式化にも意味があるだろう.

パウリ-フィールツ模型では場の二次の量が現れ, 赤外特異条件下でも赤外発散は起きず, もとのフォック空間に基底状態が存在する [13]. ファン・ホーフェ模型に場の二次を加えた形

式的 (非物理的) な模型でパウリ-フィールツ模型と類似の結論が得られるか, 有限温度を含めて具体的かつ確実な検証には一定の意義があると考えられ, これは今後の研究の課題である.

ボース-アインシュタイン凝縮に限らず, レゾルベント環による物性の具体的な模型の解析も重要な課題である. 特にファン・ホーフェ模型と同じく, ラッティンジャー液体のような模型での具体的な議論の積み上げも重要であろう.

3　レゾルベント環による議論

ここでは無限系をレゾルベント環, 特に文献 [16] の記述をもとに, C^*-環による相転移の記述を重視する形で相転移の存在を議論する. 自由ボース気体のボース-アインシュタイン凝縮の厳密な議論 [2] はよく知られているため, レゾルベント環での秩序変数の定式化の紹介を重視し, 既存の議論は必要な結果の紹介に留める. 詳しくはワイル環を利用して書かれた教科書 [16] を参照すること.

ボース-アインシュタイン凝縮が起きる状況を議論すれば起きない状況も同時に議論できるため, 原則としてボース-アインシュタイン凝縮の発現をレゾルベント環でどう見えるかを考えたあとは, ボース-アインシュタイン凝縮が発現している状況だけを議論する.

3.1　系の設定

議論を簡潔にするため, 無限体積極限を取る状況では空間領域として $L > 0$ に対して $I_L = \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ とし, 対応する一次元の格子を

$$\Gamma_L = \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{2\pi}{L}n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

とする. さらに記号を簡潔にするため $V = L^d$ とする.

任意の有界領域 O に対して

$$\mathcal{R}(O) = \mathcal{R}\left(Q\left(\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}|_O\right)\right)$$

とし, 環 $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}$ を和集合

$$\mathcal{R}_{\mathrm{loc}} = \bigcup_{O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)} \mathcal{R}(O)$$

で定め, ここだけの用語として稠密環と言い, 稠密環上の状態も稠密状態などと言う. 同じように部分空間 $\mathcal{D}_{0,\beta}$ に付随する局所環・稠密環も定める. さらに C^*-閉包・帰納極限として準局所環とその閉部分環を

$$\mathcal{R}(\mathcal{D}_{0,\beta}) \subset \mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{H}_\beta) = \overline{\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}}$$

で定める. 特に準局所環は全環または全レゾルベント環とも言う. 命題3.7で定める BEC 状態に対する GNS 表現 $\pi_{\mathrm{BEC},\beta}$ での強閉包で得られるフォン・ノイマン環を

$$\mathcal{M}_{\mathrm{BEC},\beta} = \mathcal{M}_{\mathrm{BEC},\beta}(\mathcal{H}_\beta) = \overline{\pi_{\mathrm{BEC},\beta}\left(\mathcal{R}(\mathcal{D}_{0,\beta})\right)}^{\mathrm{s}}$$

とする.

有界系での自由ボース気体に対する, 逆温度 β での KMS 状態は大正準状態である. 帰納極限 (無限体積極限) として定式化されていて大正準状態での代数的な KMS 条件を保てるため, 帰納極限として得られる状態も KMS 状態である.

記述を簡潔に保つため, 荒木-ウッズ表現は原則として左荒木-ウッズ表現を考えるとし, 可換子環を記述する場合のように左右を区別する必要がない限り左右を表す添字は省略する場合がある.

自由ボース気体に対する自己同型群はレゾルベント生成元に対して

$$\alpha_{\mathrm{fr},\mu,t}(R(\lambda, f)) = R\left(\lambda, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(h-\mu)} f\right)$$

で定める. ここで一粒子ハミルトニアンを h, 化学ポテンシャルを μ とし, もし $\mu = 0$ なら単に $\alpha_{\mathrm{fr}} = \left\{\alpha_{\mathrm{fr},t}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ とする. 一粒子ハミルトニアンは波数空間では関数で, 条件 $h(0) = 0$ が仮定されている. 有界領域 $O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ での自己同型群は $\alpha_{\mathrm{fr},\mu,O} = \left\{\alpha_{\mathrm{fr},\mu,O,t}\right\}_{t\in\mathbb{R}^d}$ とする. 自己同型群の作用は f の台特性を変えないため, 任意の局所環・稠密環・全レゾルベント環に対して自由ボース気体の自己同型群は確かに自己同型群である. 誤解の恐れがないときは α_{fr} を単に α で表す.

Remark 3.1. 有限温度では q_{nz} を整定義にしなければならず, 記述を簡潔にするためレゾルベント環自体にも常にその制約を課す. フォン・ノイマン環を取ると自然に $\mathcal{D}_{0,\beta}$ の閉包が取られる一方, レゾルベント環の原論文 [5] でも度々言及されているように, C^*-環として $\mathcal{R}(\mathcal{D}_{0,\beta})$ と $\mathcal{R}(\mathcal{H}_\beta)$ は一致しない.

ボース-アインシュタイン凝縮による直積分分解は準双線型形式 q_0 が担う. 定義を確認するとわかるように, これはディラックのデルタ関数に付随する閉でない準双線型形式である. 同じく $\mathcal{D}_{0,\beta}$ で制限しているように, 少なくともフーリエ変換の原点での評価は有限でなければならない. 可閉ではないため定義域に注意する. 急減少関数の空間 $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ のような空間を取る方がよいかもしれない. 原点近傍で $\widehat{f}(0)$ の値を明確に定めるには例えば原点近傍での連続性さえあればよく, リーマン-ルベーグの補題によって $\widehat{f} \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right)$ まで実現されてしまう $\mathcal{D}_{0,\beta}$ は明らかに最良の選択ではない. あくまで簡潔性・明確性を基準にした選択とする.

3.2 全空間に向けた議論

自由ボース気体の議論としてほぼ自明なため簡潔に議論する.

任意の有界領域 O に対して, 有界系自由ボース気体の時間発展に対応する自己同型写像 $\alpha_{\mathrm{fr},\mu,O,t} \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{R}(O)$ を有界系の自己同型群からの誘導として定める. このとき有界領域の包含 $O_1 \subset O_2$ のもとで, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha_{\mathrm{fr},\mu,O_2,t}\big|_{\mathcal{R}(O_1)} = \alpha_{\mathrm{fr},\mu,O_1,t}$ が成り立つ.

局所自己同型群の族 $\alpha_{\mathrm{fr},\mu} = \left\{\alpha_{\mathrm{fr},\mu,O}\right\}_{O\in\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)}$ は稠密環 $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}$ 上に一意的に拡張され, 稠密環上の自己同型群 $\alpha_{\mathrm{fr},\mu,\mathrm{loc}} = \left\{\alpha_{\mathrm{fr},\mu,\mathrm{loc},t}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ を与える. さらに稠密環上の自己同型群は全レゾルベント環上で直接定義される自己同型群 $\alpha_{\mathrm{fr},\mu}$ に拡張される.

有界系自由ボース気体の逆温度 β での KMS 状態は大正準状態として与える. 特に各 $O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ に対して自己同型写像 $\alpha_{\mathrm{fr},\mu,O,t}$ に関する KMS 状態である. 局所環 $\mathcal{R}(O)$ への制限を

$$\psi_{\mathrm{GC},\beta,\mu}\big|_{\mathcal{R}(O)} = \psi_{\mathrm{GC},O,\beta,\mu}$$

のように表し, 大正準状態の族を $\psi_{\mathrm{GC},\beta,\mu} = \left\{\psi_{\mathrm{GC},O,\beta,\mu}\right\}_{O\in\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)}$ で定める.

開集合の包含 $O_1 \subset O_2$ のもとで, 制限の結合法則によってこれらの局所状態は整合性条件

$$\psi_{\mathrm{GC},\beta,\mu}\big|_{\mathcal{R}(O_2)}\Big|_{\mathcal{R}(O_1)} = \psi_{\mathrm{GC},\beta,\mu}\big|_{\mathcal{R}(O_1)}$$

をみたす.

上記の議論によって局所レゾルベント環がなす整合的な局所状態の族は稠密環 $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}$ 上の一意的な稠密状態 $\psi_{\mathrm{loc},\beta,\mu}$ を定める. この状態は $\mathcal{R}$ 上への連続拡張 $\psi_{\beta,\mu}$ を持つ. 化学ポテンシャルが 0 のときは単に $\psi_{\mathrm{loc},\beta}$ とし, 任意の連続拡張を ψ_β とする.

Remark 3.2. 全レゾルベント環に連続拡張された状態の存在は明らかである. 問題は $\mu = 0$ での一意性で, 一意性が破壊される状況がまさにボース-アインシュタイン凝縮の発現である.

任意の有界領域 O は十分大きな $L > 0$ に対する超立方体 I_L^d に含まれる. ノルムも領域に合わせて単調増加するため, 評価は常に超立方体に帰着できる点に注意し, 以下では有界領域は主に超立方体を考える.

任意に $L>0$ を固定する．このとき任意の $f\in\ell^2\left(\Gamma_L^d\right)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathsf{q}_{0,\mu,L}(f) &= \frac{(2\pi)^d}{V}\frac{1+\mathsf{e}^{-\beta(h(k)-\mu)}}{1-\mathsf{e}^{-\beta(h(k)-\mu)}}\left|f_k\right|^2, \\
\mathsf{q}_{\mathrm{nz},\mu,L}(f) &= \frac{(2\pi)^d}{V}\sum_{k\in\Gamma_L^d\setminus\{0\}}\frac{1+\mathsf{e}^{-\beta(h(k)-\mu)}}{1-\mathsf{e}^{-\beta(h(k)-\mu)}}\left|f_k\right|^2
\end{aligned}
\tag{18}
$$

を定める．

ワイル作用素に対する評価・レゾルベントに対する評価は準双線型形式によって次のように書ける．

Lemma 3.3. 化学ポテンシャルは $\mu<0$ とし，任意の有界領域 O に対して $f\in Q\left(\mathsf{q}_{\mathrm{nz},\mu}|_O\right)$ とする．このとき稠密状態 $\psi_{\mathrm{loc},\beta,\mu}$ はワイル作用素 $W(f)$ に対して

$$
\psi_{\mathrm{loc},\beta,\mu}\left(W(f)\right)=\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{loc},\mu,O}(f)\right),\quad \mathsf{q}_{\mathrm{loc},\mu,O}(f)=\left\|K_{\beta,\mu}^{\frac{1}{2}}f\right\|_{L^2(O)}^2
$$

のように評価され，レゾルベント環の生成元は

$$
\psi_{\mathrm{loc},\beta,\mu}\left(R(\lambda,f)\right)=\mathsf{i}\int_0^{(\operatorname{sgn}\lambda)\infty}\mathsf{e}^{-\lambda t}\mathsf{e}^{-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{loc},\mu,O}(f)}\,dt
$$

をみたす．特に定義3.1の記号で有界領域を $O=I_L^d$ とすれば

$$
\mathsf{q}_{\mathrm{loc},\mu,I_L^d}(f)=\mathsf{q}_{0,\mu,L}(f)+\mathsf{q}_{\mathrm{nz},\mu,L}(f)
$$

のように分解される．

3.3 秩序変数とボース-アインシュタイン凝縮の発現

零モードを記述する関数の近似列を利用して秩序変数を定義する．秩序変数は大まかには領域 I_L^d でのフーリエ級数展開は波数空間での原点に質量を持つディラックのデルタ関数である．

Definition 3.4. 特に原点中心で一辺の長さを L とする $\mathbb{R}^d$ の超立方体を I_L^d とし，この体積を $V=L^d$ とする．各 I_L^d の定義関数を利用して

$$
\mathsf{b}_L^{(0)}=\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}\mathbf{1}_{I_L^d},\quad \mathsf{b}_L^{(1)}=\frac{1}{V}\mathbf{1}_{I_L^d}
$$

を定める．これらは $\#=0,1$ に対して $\mathsf{b}_L^{(\#)}=\frac{1}{V^{\frac{1+\#}{2}}}\mathbf{1}_{I_L^d}$ とも表せ，さらに

$$
\left\|\mathsf{b}_L^{(0)}\right\|_{L^2\left(I_L^d\right)}=1,\quad \int_{\mathbb{R}^d}\mathsf{b}_L^{(1)}(x)\,dx=1,\quad \left\|\mathsf{b}_L^{(1)}\right\|_2=\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}\to 0
$$

をみたす．稠密環 $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}$ 上の状態 $\psi_{\mathrm{loc},\beta}$ に対して

$$
\mathsf{o}_{\mathrm{BEC}}^{(\#)}=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{\mathsf{i}}\psi_{\mathrm{loc},\beta}\left(R\left(1,\mathsf{b}_L^{(\#)}\right)\right)\in[0,\,1],\quad \#=0,1
$$

を定め，秩序変数と言う．

直接計算で近似関数列は次のように評価できる．

Lemma 3.5. 先の $\mathsf{b}_L^{(\#)}$ のフーリエ級数変換は波数空間 Γ_L^d 上で

$$\widehat{\mathsf{b}_L^{(0)}}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} V^{\frac{1}{2}} \delta_{k,0}, \quad \widehat{\mathsf{b}_L^{(1)}}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \delta_{k,0}$$

をみたす.

ボース-アインシュタイン凝縮の判定のため, 教科書 [16] の記述をもとに記号の紹介を含めて議論する.

いったん化学ポテンシャルを $\mu < 0$ として $y = \mathsf{e}^{-\beta\mu}$ とする. このとき平均粒子数 N_V と粒子数密度 ρ_V を

$$N_V = N_V(\beta, y) = \sum_{k\in\Gamma_L^d} \frac{1}{y\mathsf{e}^{\beta h(k)} - 1}, \quad \rho_V(\beta, y) = \frac{1}{V} N_V(\beta, y)$$

とする. このとき任意の正の数 $\bar{\rho} > 0$ に対して $\rho_V(\beta, y_V) = \bar{\rho}$ をみたす $y_V > 1$ が一意的に存在する. 特に β を固定して $y > 1$ の関数 f_V を $f_V(y) = \rho_V(\beta, y)$ とすれば $y_V = f_V^{-1}(\bar{\rho})$ が成り立つ. このとき y_V は V に対して狭義単調減少で極限 $y_\infty = \lim_{V\to\infty} y_V \geq 1$ が存在する.

ボース-アインシュタイン凝縮を前提に平均粒子数を

$$N_V(\beta, y) = N_0(y) + N_{V,\mathrm{R}}(\beta, y), \quad N_0(y) = \frac{1}{y-1}, \quad N_{V,\mathrm{R}}(\beta, y) = \sum_{k\in\Gamma_L^d\setminus\{0\}} \frac{1}{y\mathsf{e}^{\beta h(k)} - 1}$$

のように分解する. ここで $\beta > 0$ と $y \geq 1$ の関数として

$$\rho(\beta, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{y\mathsf{e}^{\beta h(k)} - 1}\, dk$$

を定める. さらに固定した粒子数密度 $\bar{\rho}$ と臨界密度 ρ_{c} に対して, 臨界逆温度 β_{c} を

$$\rho_{\mathrm{c}}(\beta_{\mathrm{c}}) = \bar{\rho}$$

とし, これを利用して臨界密度 $\rho_{\mathrm{c}}(\beta) = \rho(\beta, 1)$ を定める. このとき $\rho_0(\beta) = \lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} N_0(y_V)$ に対して

$$\rho_0(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta \leq \beta_{\mathrm{c}} \quad (\bar{\rho} \leq \rho_{\mathrm{c}}(\beta)), \\ \bar{\rho} - \rho_{\mathrm{c}}(\beta), & \beta > \beta_{\mathrm{c}} \quad (\bar{\rho} > \rho_{\mathrm{c}}(\beta)) \end{cases}$$

が成り立つ. 特にボース-アインシュタイン凝縮が発現するとき $\rho_0(\beta) > 0$ で $y_\infty = 1$ である.

Proposition 3.6. 秩序変数の値に対して次の同値性が成り立つ.

1. 零モードが意味を持ち, ボース-アインシュタイン凝縮が発現する.
2. 秩序変数は $\mathsf{o}_{\mathrm{BEC}}^{(0)} = 0$ である.
3. 秩序変数は $\mathsf{o}_{\mathrm{BEC}}^{(1)} < 1$ である.

Proof. まず (1)⇔(2) を示す. 補題3.3によって

$$\begin{aligned} \log \psi_{\mathrm{loc},\beta}\left(W\left(\mathsf{b}_L^{(0)}\right)\right) &= -\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{loc},\mu,I_L^d}\left(\mathsf{b}_L^{(0)}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\mathsf{q}_{0,\mu,L}\left(\mathsf{b}_L^{(0)}\right) - \frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz},\mu,L}\left(\mathsf{b}_L^{(0)}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\mathsf{q}_{0,\mu,L}\left(\mathsf{b}_L^{(0)}\right) = -\frac{1}{4}\frac{y_V+1}{y_V-1} \end{aligned} \tag{19}$$

が得られる．同じく補題3.3によって

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mathsf{i}}\psi_{\mathrm{loc},\beta}\left(R\left(1,\mathsf{b}_L^{(0)}\right)\right) &= \int_0^\infty \mathsf{e}^{-t}\psi_{\mathrm{loc},\beta}\left(W\left(t\mathsf{b}_L^{(0)}\right)\right)dt \\
&= \int_0^\infty \mathsf{e}^{-t}\exp\left(-\frac{t^2}{4}\frac{y_V+1}{y_V-1}\right)dt
\end{aligned}
\tag{20}
$$

が成り立つ．

ボース-アインシュタイン凝縮が起きるとき

$$\lim_{L\to\infty} y_V = 1 \Rightarrow \mathsf{o}_{\mathrm{BEC}}^{(0)} = 0$$

が成り立ち，ボース-アインシュタイン凝縮が起きないときは

$$\lim_{L\to\infty} y_V > 1 \Rightarrow \mathsf{o}_{\mathrm{BEC}}^{(0)} < 1$$

が成り立つ．

逆に秩序変数が 1 未満なら $\lim_{L\to\infty}\frac{N_0(y_V)}{V} > 0$，秩序変数が 1 なら $\lim_{L\to\infty}\frac{N_0(y_V)}{V} = 0$ でなければならない．したがって

$$\mathsf{o}_{\mathrm{BEC}}^{(0)} = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{\mathsf{i}}\psi_{\mathrm{loc},\beta}\left(R\left(1,\mathsf{b}_L^{(0)}\right)\right)\begin{cases} = 0, & \text{BEC 発現,} \\ > 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

が得られる．

次に (1)⇔(3) を示す．こちらも分解のうち $\mathsf{q}_{0,\mu,L}$ 成分だけが生き残る．特に

$$
\begin{aligned}
\log\psi_{\mathrm{loc},\beta}\left(W\left(\mathsf{b}_L^{(1)}\right)\right) &= -\frac{1}{4}\mathsf{q}_{0,\mu,L}\left(\mathsf{b}_L^{(1)}\right) \\
&= -\frac{1}{4V}\frac{y_V+1}{y_V-1} = -\frac{1}{4}\left(y_V+1\right)\frac{N_0(y_V)}{V}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

が成り立つ．右辺の $\frac{N_0(y_V)}{V}$ はボース-アインシュタイン凝縮を記述する量として確立している．

同じく補題3.3によって

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mathsf{i}}\psi_{\mathrm{loc},\beta}\left(R\left(1,\mathsf{b}_L^{(1)}\right)\right) &= \int_0^\infty \mathsf{e}^{-t}\psi_{\mathrm{loc},\beta}\left(W\left(t\mathsf{b}_L^{(1)}\right)\right)dt \\
&= \int_0^\infty \mathsf{e}^{-t}\exp\left(-\frac{t^2}{4}\left(y_V+1\right)\frac{N_0(y_V)}{V}\right)dt
\end{aligned}
\tag{22}
$$

が成り立つ．

先程と同じくボース-アインシュタイン凝縮が起きるとき

$$\lim_{L\to\infty}\frac{N_0(y_V)}{V} > 0 \Rightarrow \mathsf{o}_{\mathrm{BEC}}^{(1)} < 1$$

で，ボース-アインシュタイン凝縮が起きないとき

$$\lim_{L\to\infty}\frac{N_0(y_V)}{V} = 0 \Rightarrow \mathsf{o}_{\mathrm{BEC}}^{(1)} = 1$$

である．再び先程と同じくこの逆も成り立つ．したがって

$$\mathsf{o}_{\mathrm{BEC}}^{(0)} = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{\mathsf{i}}\psi_{\mathrm{loc},\beta}\left(R\left(1,\mathsf{b}_L^{(1)}\right)\right)\begin{cases} < 1, & \text{BEC 発現,} \\ = 1, & \text{otherwise}\end{cases}$$

が得られる． □

以下では原則としてボース-アインシュタイン凝縮が発現している状況だけを考える．

3.4 無限系での議論

補題3.3によって次の命題が得られる.

Proposition 3.7. 連続拡張 ψ_β は $f, g \in \mathcal{D}_{0,\beta}$ に対する生成元の二点関数に対して

$$\begin{aligned}
&\psi_{\mathrm{BEC},\beta}(W(f)) = \exp\left(-\frac{1}{4}\left(\mathsf{q}_0(f) + \mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(f)\right)\right), \\
&\psi_{\mathrm{BEC},\beta}\left(R(\lambda, f)R(\mu, g)\right) \\
&= \int_0^{(\operatorname{sgn}\lambda)\infty}\int_0^{(\operatorname{sgn}\mu)\infty} \exp\left(-\frac{\mathrm{i}st}{2}\operatorname{Im}\langle f,\, g\rangle - (\lambda s + \mu t)\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_0(sf+tg)\right)\cdot \exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(sf+tg)\right) ds\, dt
\end{aligned} \tag{23}$$

をみたす準自由状態である. 特に秩序変数の値によって q_0 が意味を持つか判定される. 準双線型形式 q_0 が意味を持たないとき, 明確化のため非零モードの状態の意味で $\psi_{\mathrm{nz},\beta}$ を

$$\begin{aligned}
&\psi_{\mathrm{nz},\beta}(W(f)) = \exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(f)\right) \\
&\psi_{\mathrm{nz},\beta}\left(R(\lambda, f)R(\mu, g)\right) \\
&= \int_0^{(\operatorname{sgn}\lambda)\infty}\int_0^{(\operatorname{sgn}\mu)\infty} \exp\left(-\frac{\mathrm{i}st}{2}\operatorname{Im}\langle f,\, g\rangle - (\lambda s + \mu t)\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(sf+tg)\right) ds\, dt
\end{aligned} \tag{24}$$

で定める.

レゾルベント環での一点関数は $\mu = 1$ かつ $g = 0$ で得られ, あとは準自由性によって生成元の任意有限個の積まで伸ばせる. あとで議論しているように, 準双線型形式 q_0 は古典成分としてフォン・ノイマン環の非自明な中心と直積分を与え, 準双線型形式 q_{nz} は成分表現としての荒木-ウッズ表現を与える. 直積分分解は命題3.10で再定式化する. 必要に応じて q_{nz} も荒木-ウッズ表現で実現できる.

Remark 3.8. 非正則性と中心の可視化に関して, C^*-環として非自明な中心を持つべきではない・フォン・ノイマン環の中心が見えるべきではない点との整合性を議論する. つまり命題3.7の BEC 状態での期待値は GNS 表現を取ってフォン・ノイマン環上で議論し, それをレゾルベント環の生成元に引き戻しているとみなすべきである. さらに言えば C^*-環にとって BEC 状態は本来意味を持たず, C^*-環としての無限系の状態は非零モード状態 $\psi_{\mathrm{nz},\beta}$ であるべきとも言える.

条件 $f \in Q(\mathsf{q}_{\mathrm{nz}})$ と $f \notin L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ をみたす f に対して原点での対数発散によって $\widehat{f}(0) = \infty$ をみたす関数が構成できる. この f に対して

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathsf{q}_0(f)} = 0, \quad \psi_{\mathrm{BEC},\beta}\left(R(\lambda, f)\right) = 0$$

を仮定すれば, この状態に付随する GNS 表現のもとで, 全環 $\mathcal{R}(\mathcal{H}_\beta)$ の表現に非自明な核が生まれる. レゾルベント環の原論文 [6] によってレゾルベント環の正則表現は忠実でなければならないため, 対偶を取れば全環に対して BEC 状態に付随する GNS 表現は非正則である.

この注意を前提に無限系の状態の正則性を確認する.

Proposition 3.9. *命題3.7の設定を引き継ぐ. 特に $d \geq 3$ とする.*

1. *非零モード状態 $\psi_{\mathrm{nz},\beta}$ はワイル環・レゾルベント環のどちらでも正則である.*
2. *BEC 状態 $\psi_{\mathrm{BEC},\beta}$ は関数の領域を $\mathcal{D}_{0,\beta}$ に制限すれば, つまり $\mathcal{W}(\mathcal{D}_{0,\beta})$ または $\mathcal{R}(\mathcal{D}_{0,\beta})$ を考えれば, これらの上で正則である.*

レゾルベント環では核の自明性で定義されるため, 忠実な表現を生成するかに帰着される.

レゾルベント環の正則表現はワイル環の正則表現を誘導するため, レゾルベント環での正則性を示せば十分であるものの, 念のためワイル環でも直接証明を掲載する.

言明 (2) では $f \notin \mathcal{D}_{0,\beta}$ のとき $\mathsf{q}_0(f)$ が定義されないため, 正則性を議論する以前の問題である. もしくは注意3.8で見たように $\mathsf{q}_0(f) = 0$, ひいては BEC 状態に対する期待値を 0 とする流儀を採用し, 原論文 [6] に基づいたイデアル論で詳しく議論する必要がある.

Proof. (1：ワイル環)：ワイル環に対しては $t \in \mathbb{R}$ と $f \in \mathcal{D}_{0,\beta}$ に対して $\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(tf) \to 0$ を示せばよい. これは $\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(tf) = t^2 \mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(f) \to 0$ によって明らかである.

(1：レゾルベント環)：記述を簡潔にするため, 状態を単に ψ とし, GNS 表現を $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ とする. GNS ベクトルの巡回性によって, 任意の $\mu \in \mathbb{R}$ と $g \in \mathcal{D}_{0,\beta}$ に対して

$$\pi\left(R(1,f)\right)\pi\left(R(\mu,g)\right)\Omega \neq 0$$

を示せば $\operatorname{Ker}\pi(R(1,f)) = \{0\}$ が得られる. ここで

$$\begin{aligned}
&\langle \pi\left(R(1,f)\right)\pi\left(R(\mu,g)\right)\Omega,\, \pi\left(R(1,f)\right)\pi\left(R(\mu,g)\right)\Omega \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \psi\left(R(\mu,g)^* R(1,f)^* R(1,f) R(\mu,g)\right)
\end{aligned} \tag{25}$$

が得られる. 状態 ψ は準自由状態であるため, 右辺は二点関数の和で書け, 特に

$$\begin{aligned}
&\psi\left(R(\mu,g)^* R(1,f)^* R(1,f) R(\mu,g)\right) \\
&= \psi\left(R(\mu,g)^* R(1,f)^*\right) \cdot \psi\left(R(1,f) R(\mu,g)\right) \\
&\quad + \psi\left(R(\mu,g)^* R(1,f)\right) \cdot \psi\left(R(1,f)^* R(\mu,g)\right) \\
&\quad + \psi\left(R(\mu,g)^* R(\mu,g)\right) \cdot \psi\left(R(1,f)^* R(1,f)\right) \\
&= \left|\psi\left(R(1,f) R(\mu,g)\right)\right|^2 + \left|\psi\left(R(1,f)^* R(\mu,g)\right)\right|^2 \\
&\quad + \psi\left(R(\mu,g)^* R(\mu,g)\right) \cdot \psi\left(R(1,f)^* R(1,f)\right) \geq 0
\end{aligned} \tag{26}$$

が得られる. 特に q_{nz} の非退化性によって第三項はどちらも厳密に正である. これは $\pi\left(R(1,f)\right)\pi\left(R(\mu,g)\right)\Omega \neq 0$ を導く. 以上の議論によって $\operatorname{Ker}\pi(R(1,f)) = \{0\}$ が得られた.

(2：ワイル環)：任意の $f \in \mathcal{D}_{0,\beta}$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\psi_{\mathrm{BEC},\beta}(W(tf)) = \exp\left(-\frac{1}{4}t^2\left(\mathsf{q}_0(f) + \mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(f)\right)\right)$$

は連続である.

(2：レゾルベント環)：本命題 (1) の正値性評価は q_{nz} に対する評価である. さらに非負の準双線型形式 q_0 が追加されたため, 核に入る条件は厳しくなっている. これで正則性が得られる. □

3.5 BEC 状態の直積分分解

まずは成分状態 $\psi_{r,\theta}$ を定義する. 記号を簡潔にするため極座標に対しても $\mathbb{R}^2$ 表記を利用する. このとき任意の $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ と $f, g \in \mathcal{D}_{0,\beta}$ に対して

$$\ell_{\beta,r,\theta}(f) = \sqrt{c\left(\bar{\rho},\beta\right) r}\,\mathrm{Re}\left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta}\widehat{f}(0)\right), \quad c\left(\bar{\rho},\beta\right) = 2(2\pi)^d \rho_0(\beta)$$

を利用して, 準自由状態 $\psi_{r,\theta}$ を

$$\begin{aligned}
&\psi_{r,\theta}\left(R(\lambda,f)R(\mu,g)\right) \\
&= \int_0^{(\operatorname{sgn}\lambda)\infty} ds \int_0^{(\operatorname{sgn}\mu)\infty} dt\, \mathsf{e}^{-\frac{\mathsf{i}st}{2}\operatorname{Im}\langle f,g\rangle} \\
&\quad \times \mathsf{e}^{-\left(\lambda - \mathsf{i}\ell_{\beta,r,\theta}(f)\right)s}\mathsf{e}^{-\left(\mu t - \mathsf{i}\ell_{\beta,r,\theta}(g)\right)t} \exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(sf + tg)\right)
\end{aligned} \tag{27}$$

で定める．準双線型形式 q_0 がボース-アインシュタイン凝縮を記述する零モードで, その直積分分解の成分状態が $\psi_{r,\theta}$ である．この中の $\ell_{\beta,r,\theta}$ はレゾルベントのスカラーに現れていて, これは古典変数の混入と解釈できる．注意3.22や注意3.8も重要である．成分状態は荒木-ウッズ表現を利用して表示できる．

Proposition 3.10. *このときレゾルベント環 $\mathcal{R}_\beta$ 上の BEC 状態の二点関数は*

$$\psi_{\mathrm{BEC},\beta}\left(R(\lambda,f)R(\mu,g)\right)=\int_{\mathbb{R}^2}\psi_{r,\theta}\left(R(\lambda,f)R(\mu,g)\right)d\chi(r,\theta)$$

のように表せる．特に荒木-ウッズ空間上の定ファイバー直積分によるレゾルベント環に対する BEC 状態・BEC 表現の直積分分解が得られる．特にこの分解は KMS 状態の端点分解である．

Proof. 荒木-ウッズ表現は因子表現で, KMS 状態に対して端点性と因子状態性は同値であるため, 荒木-ウッズ表現による分解が得られたならそれは端点分解である．よく知られたベッセル関数の表示, または後述の補題5.4によって $\mathsf{e}^{-\frac{1}{4}\mathsf{q}_0(f)}$ の積分表示

$$\mathsf{e}^{-\frac{1}{4}\mathsf{q}_0(f)}=\int_{\mathbb{R}^2}e_{\beta,f}(r,\theta)\,d\chi(r,\theta),\quad e_{\beta,f}(r,\theta)=\exp\left(\mathsf{i}\sqrt{c(\bar{\rho},\beta)r}\,\mathrm{Re}\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta}\widehat{f}(0)\right)$$

が得られる．したがってレゾルベント環 $\mathcal{R}$ 上の BEC 状態の二点関数は

$$\begin{aligned}
&\psi_{\mathrm{BEC},\beta}\left(R(\lambda,f)R(\mu,g)\right)\\
&=\int_0^{(\operatorname{sgn}\lambda)\infty}ds\int_0^{(\operatorname{sgn}\mu)\infty}dt\exp\left(-\frac{\mathsf{i}st}{2}\,\mathrm{Im}\,\langle f,\,g\rangle-(\lambda s+\mu t)\right)\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_0\left(sf+tg\right)\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(sf+tg)\right)\\
&=\int_0^{(\operatorname{sgn}\lambda)\infty}ds\int_0^{(\operatorname{sgn}\mu)\infty}dt\exp\left(-\frac{\mathsf{i}st}{2}\,\mathrm{Im}\,\langle f,\,g\rangle-(\lambda s+\mu t)\right)\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(sf+tg)\right)\int_{\mathbb{R}^2}e_{\beta,sf+tg}(r,\theta)\,d\chi(r,\theta)\\
&=\int_{\mathbb{R}^2}d\chi(r,\theta)\int_0^{(\operatorname{sgn}\lambda)\infty}ds\int_0^{(\operatorname{sgn}\mu)\infty}dt\\
&\quad\times\mathsf{e}^{-\frac{\mathsf{i}st}{2}\mathrm{Im}\langle f,g\rangle}\mathsf{e}^{-\left(\lambda-\mathsf{i}\ell_{\beta,r,\theta}\right)s}\mathsf{e}^{-\left(\mu-\mathsf{i}\ell_{\beta,r,\theta}\right)t}\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(sf+tg)\right)\\
&=\int_{\mathbb{R}^2}\psi_{r,\theta}\left(R(\lambda,f)R(\mu,g)\right)d\chi(r,\theta)
\end{aligned}\tag{28}$$

のように書き直せる． □

改めて自由ボース気体に対する KMS 状態の一意性を議論する．

Proposition 3.11. *自己同型群を自由ボース気体の自己同型群 α_{fr} に固定し, KMS 状態もこの α_{fr} に対する KMS 状態とする．*

1. *稠密環 $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D}_{0,\beta})$ 上で KMS 状態は一意である．*
2. *ボース-アインシュタイン凝縮が起きないとき, 無限系での KMS 状態は一意である．*
3. *ボース-アインシュタイン凝縮が起きるとき, 無限系での KMS 状態は一意ではない．*

Proof. (1): 稠密環上では各局所環への制限が大正準状態でなければならない．さらに局所環では自由ボース気体のハミルトニアンを利用したトレースで与えられる状態が一意である．したがって稠密環上の一意性が得られた．

(2): 本命題 (1) によって候補の KMS 状態 ψ は稠密環上で大正準状態と一致する．稠密環の稠密性によって ψ と稠密環に拡張した大正準状態 $\psi_{\mathrm{loc},\beta}$ は連続拡張を持つ．無限体積極限の議論によって無限系の状態を本質的に記述する量は準双線型形式 q_{nz} である．特にこれが二点関数 (共分散) を定め, 準自由性の制約を与える．したがって $\psi_{\mathrm{loc},\beta}$ は一意な拡張しか持ちえない．

(3): 直積分分解の成分状態はどれも KMS 状態である．したがって KMS 状態は一意ではない． □

3.6 秩序変数と中心

まず抽象的なレゾルベント環上で成立する次の命題に注意する．

Proposition 3.12. 定義3.1の $\mathcal{R}(\mathcal{D}_{0,\beta})$ を考える．秩序変数を定める要素の族 $\left\{R\left(1, \mathsf{b}_L^{(0)}\right)\right\}_{L>0}$ は任意の $A \in \mathcal{R}(\mathcal{D}_{0,\beta})$ に対して

$$\lim_{L\to\infty}\left[R\left(1, \mathsf{b}_L^{(0)}\right), A\right] = 0$$

をみたす．特に $\mathcal{R}(\mathcal{D}_{0,\beta})$ 上で漸近的に可換である．

Proof. 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ と $f \in \mathcal{D}_{0,\beta}$ に対する $R(\lambda, f)$ との漸近的可換性を調べればよい．レゾルベント関係式の第五式によって

$$\left\|\left[R\left(1, \mathsf{b}_L^{(0)}\right), R(\lambda, f)\right]\right\| \le \frac{\left|\mathrm{Im}\left\langle \mathsf{b}_L^{(0)}, f\right\rangle\right|}{|\lambda|^2} \tag{29}$$

が成り立つ．あとは

$$\left|\mathrm{Im}\left\langle \mathsf{b}_L^{(0)}, f\right\rangle\right| = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{Im}\int_{I_L^d} f(x)\,dx \le \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}\,\|f\|_1 \to 0$$

による． □

Remark 3.13. 全環を $\mathcal{R}(\mathcal{D}_{0,\beta})$ に縮小したとき, 秩序変数を記述する物理量が漸近的に中心に落ちると解釈でき, 特に表現によらず成立する点が重要である．ただし生成元の族が C^*-環としてのレゾルベント環のノルムで収束するかは別問題である．レゾルベント環のノルムは上限ノルム, つまり全表現にわたる上限での収束が要求されるため極めて苛烈な条件で, 直接のノルム収束は期待できない．一方, 命題3.16で議論するように BEC 表現のように表現を固定し, フォン・ノイマン環から得られる構造を利用すると, 表現空間上での作用素ノルムによる 0 への収束が証明できる．具体的な表現の選択の重要性が見える．

命題3.19で議論するように, 生成元の族 $\left\{\mathsf{b}_L^{(1)}\right\}_{L>0}$ は BEC 表現で強閉包を取ったフォン・ノイマン環の中心に作用素強位相で収束するため, BEC 状態の期待値中, または BEC 表現での作用素強位相での漸近的可換性は証明できる．

Proposition 3.14. *C^*-環としてのレゾルベント環 $\mathcal{R}(\mathcal{D}_{0,\beta})$ の BEC 表現 $\mathcal{R}_{\mathrm{BEC},\beta}(\mathcal{D}_{0,\beta}) = \pi_{\mathrm{BEC},\beta}(\mathcal{R}(\mathcal{D}_{0,\beta}))$ の中心は自明である．*

Proof. 命題3.9によって BEC 表現は正則である．一般論の命題2.1によってレゾルベント環の正則表現は忠実である．特にレゾルベント環は常に正則な既約表現としてフォック表現を持ち, この中心は自明である．したがって BEC 表現の忠実性によって BEC 表現での中心は自明である． □

Remark 3.15. BEC 表現の閉包を取ったフォン・ノイマン環の中心は $L^\infty\left(\mathbb{R}^2,\chi\right)$ は連続関数環を含む. 一方この言明によって, 連続関数環の要素は作用素強位相での収束でしか掴まえられない. つまりフォン・ノイマン環の中心は本質的にフォン・ノイマン環的対象である.

定数しか残らない事情にも物理的に積極的な意味がある. つまり有限・局所的な観測で秩序変数 (r,θ) は読み取れない. 特に位相 θ は数学的な状態として定義できるものの, 観測可能量としては存在しないと解釈できる. これは自発的対称性の破れにとって重要な知見です. さらに言えば互いに異なる (r,θ) セクターは局所演算で混ざらず, 作用素として分離不可能である. BEC 相での位相は超選択量で観測可能ではないとも言える.

よく実験的には干渉縞から位相が測れると言う. これは二つの系の相対位相を利用していて, 特に測定装置を含めた複合系を必要とする. つまり干渉縞から位相が測れる事実そのものが極めて非自明で重要な別問題である. 単独の系として位相は状態のラベルで測定可能な作用素ではない.

上記の命題と注意の観点から秩序変数と中心の関係を調べる.

Proposition 3.16. *秩序変数を定める要素の族* $\left\{R\left(1,\mathsf{b}_L^{(0)}\right)\right\}_{L>0}$ *は BEC 表現のノルム位相で* 0 *に収束する.*

Proof. 直積分は確率測度による積分だから各ファイバーでの収束を考えればよい. 各ファイバーでは $\pi_{r,\theta}\left(R\left(1,\mathsf{b}_L^{(0)}\right)\right)=R_{\beta,1}\left(1-\mathrm{i}\ell_{\beta,r,\theta};\mathsf{b}_L^{(0)}\right)$ をみたす. したがって $\widehat{\mathsf{b}_L^{(0)}}(0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}V^{\frac{1}{2}}$ に注意すれば

$$\left\|\pi_{r,\theta}\left(R\left(1,\mathsf{b}_L^{(0)}\right)\right)\right\|\leq\frac{1}{\left|1-\mathrm{i}\ell_{\beta,r,\theta}\left(\mathsf{b}_L^{(0)}\right)\right|}\to 0$$

が成り立つ. □

Remark 3.17. BEC 表現ではレゾルベントの第一変数の定数項に $-\mathrm{i}\ell_{\beta,r,\theta}$ が現れるため, 作用素強位相での収束どころかノルム収束が確約される. これも注意3.8の議論が重要である. つまり表現でフォン・ノイマン環を考えてから, その表現での作用素ノルムを考えているとみなすべきである.

中心への漸近的な収束とは言いつつ 0 に収束してしまう点にはやや不満がある. これを補正するのが命題3.19である. さらに言えば命題3.14によって C^*-環としてのレゾルベント環の正則表現に対して中心は自明なため, この命題は C^*-環として考えられる最大限の具体的な議論とも言える.

表現空間でレゾルベントが 0 に収束するのは, シーガルの場の作用素の期待値が無限大に発散する場合とみなせるため, よくあるボース-アインシュタイン凝縮の定式化とも整合的である. 一般の状態・表現ではこのような性質は成り立たないため, 抽象的なレゾルベント環では収束が議論できない点も整合的である.

特に命題3.16の列に対して任意の定数を加えれば次の系が得られる.

Corollary 3.18. *BEC 表現上で非零の定数にノルム収束する要素の族が存在する.*

命題3.14の制約によってこれ以上の結果はありえない.

次にフォン・ノイマン環の観点から秩序変数と中心の関係を調べる.

Proposition 3.19. *各ファイバーでの値として*

$$z(r,\theta)=1-\mathrm{i}a\sqrt{r}\cos\theta,\quad a=2\sqrt{c(\bar{\rho},\beta)}$$

を定める. 秩序変数を定める $\mathsf{b}_L^{(1)}$ *に対する* $\ell_{\beta,r,\theta}\left(\mathsf{b}_L^{(1)}\right)=a\sqrt{r}\cos\theta$ *に注意して, BEC 表現での中心の要素として*

$$F(r,\theta)=R\left(z(r,\theta),0\right)=\frac{1}{\mathrm{i}z(r,\theta)}\in C_0\left(\mathbb{R}^2\right)\subset L^\infty\left(\mathbb{R}^2,\chi\right)$$

を定める．このとき各ファイバー上の作用素の族 $\left\{R_{\beta,1}\left(z(r,\theta),\mathsf{b}_L^{(1)}\right)\right\}_{L>0}$ は $R_{\beta,1}(z(r,\theta),0)$ に作用素強位相で収束する．特に *BEC* 表現での作用素の族 $\left\{\pi_{\mathrm{BEC},\beta}\left(R\left(1,\mathsf{b}_L^{(1)}\right)\right)\right\}_{L>0}$ は連続関数 F によるかけ算作用素に収束する．

Proof. 一粒子空間 $\mathcal{D}_{0,\beta}$ 上の弱有限粒子線型空間で $\phi_{\beta,1}\left(\mathsf{b}_L^{(1)}\right)$ は強収束する．第二レゾルベント公式によって, 弱有限粒子線型空間上で

$$R_{\beta,1}\left(z,\mathsf{b}_L^{(1)}\right)-R_{\beta,1}(z,0)=R_{\beta,1}\left(z,\mathsf{b}_L^{(1)}\right)\phi_{\beta,1}\left(\mathsf{b}_L^{(1)}\right)R_{\beta,1}(z,0)$$

が成り立つ．右辺の積の第一要素 $R_{\beta,1}\left(z,\mathsf{b}_L^{(1)}\right)$ は一様有界, 第三要素 $R_{\beta,1}(z,0)$ は定数である．したがって $R_{\beta,1}\left(z,\mathsf{b}_L^{(1)}\right)-R_{\beta,1}(z,0)$ は作用素強位相で 0 に収束する． □

これを利用すると次の系が得られる．

Corollary 3.20. 生成元の族 $\left\{\mathsf{b}_L^{(1)}\right\}_{L>0}$ はフォン・ノイマン環 $\mathcal{M}_{\mathrm{BEC},\beta}$ の作用素強位相での漸近的可換性を持つ．特に任意の $A\in\pi_{\mathrm{BEC},1}(\mathcal{R}(\mathcal{D}_{0,\beta}))$ に対して, *BEC* 状態のもとでの漸近的可換性

$$\lim_{L\to\infty}\psi_{\mathrm{BEC},\beta}\left(\left[R\left(1,\mathsf{b}_{\mathrm{BEC}}^{(1)}\right),A\right]\right)=0$$

が成り立つ．

Proof. 命題3.19によって極限作用素はフォン・ノイマン環の中心に属する形で存在する．これは自明に漸近的可換性を導く．BEC 状態のもとでの漸近的可換性はこの作用素強位相極限による． □

Remark 3.21. 抽象的な C^*-環と状態に紐づくフォン・ノイマン環の記述力命題3.19の議論は次のような物理的解釈を持ちます．

- レゾルベントの第二変数であるシーガルの場の作用素への依存が消える．これは量子揺らぎの消滅とみなせる．
- 量子揺らぎの消滅は中心の要素への収束に帰着し, 零モードの古典成分の発現を意味する．特にファイバーの添字 (r,θ) に対応する古典変数で, いわゆる凝縮波動関数の振幅と位相を記述する．

中心に属する変数は全ての局所観測量と可換なため, 測定で状態を乱されない．これが古典変数と呼ばれる理由である．ボース-アインシュタイン凝縮は特定の表現・相に依存する現象で, 抽象的なレゾルベント環のノルムで古典化は見えない．さらに言えば C^*-環は純粋な量子現象だけを記述し, 古典成分まで踏み込んで記述するにはフォン・ノイマン環の強位相が必要だとも言える．

可換 C^*-環が連続関数環, 可換フォン・ノイマン環が L^∞ である点を観測と結びつけて言えば次のような解釈もできる．

- 量子系には量子揺らぎがあり, 理想的な鋭い測定は難しい．この鋭さの欠如を連続関数で表している．
- 古典系は適当な意味で鋭い測定ができる．この鋭さを射影を表す定義関数 (不連続関数) とみなすなら, 不連続性を許容する L^∞ 空間の構造と位相が必要になる．特に鋭い測定の代表例が射影測定で, まさに不連続関数を利用する．
- 表現空間のノルムは表現を取った上でなお量子的な要素を記述できる．少なくとも表現空間でのフォン・ノイマン環の中心は連続関数を含み, この連続関数に表現空間のノルムで収束する要素が考えられる．これは古典成分を記述するべき中心の中で, 何かしら量子性を持つ要素として定式化できる．逆に連続関数であっても作用素強位相でしか収束できない要素は量子性が弱い要素と言える．

非可換位相幾何的に C^*-環連続関数環の非可換化としたとき, 量子ゆらぎと連続性が持つ鈍りを対比させると, この鈍りを保持するのが連続関数環を保つ上限ノルム・作用素ノルムとみなすと参考になるだろう.

さらに強い言明として命題3.14がある. つまり表現を取ったとしても C^*-環として掴まえられる中心は何も情報を持たず, 中心を掴まえるにはフォン・ノイマン環・作用素強位相が必要である. これは命題3.16で秩序変数の定義に利用した要素列のノルム極限が 0 になる事実とも整合的である.

Remark 3.22 (c 数置換との対応). ボゴリウボフ置換は秩序変数 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して有限体積 V で零モードの生成・消滅作用素を

$$a_0 \sim \sqrt{V}\alpha, \quad a_0^* \sim \sqrt{V}\overline{\alpha}$$

とする近似です. 秩序変数 $\mathsf{o}_{\mathrm{BEC}}^{(1)}$ の定式化ではシーガルの場の作用素に対して

$$\phi_{r,\theta,\beta}\left(\mathsf{b}_L^{(1)}\right) \to \ell_{\beta,r,\theta}\left(\mathsf{b}_L^{(1)}\right)$$

の意味で零モードの c 数置換が起きている. 対称性を破る純粋相 $\psi_{r,\theta}$ では θ が固定されて秩序変数も確定値を取る. 対称性を保つ $\psi_{\mathrm{BEC},\beta}$ は θ を混合し, 秩序変数は中心乱数として分布していて, 中心分解の確率測度 χ が現れる.

つまりボゴリウボフ置換での α の選択は代数的には中心分解の端点の選択で, 相の選択にあたる. 特に c 数置換を厳密に定式化できているとみなせる.

Remark 3.23 (GP 極限との対応). GP 極限は相互作用を含む系の希薄極限のような状況で凝縮波動関数 φ が GP 汎関数の最小化あるいは GP 方程式で決まるという主張である. ここでの対応を整理する.

GP の議論では秩序変数はふつうシーガルの場の作用素と GP 方程式の解 φ に対して

$$\langle\phi(x)\rangle \sim \sqrt{N}\varphi(x)$$

として現れる. 零モードとしての空間的定数関数の凝縮に合わせて $\mathsf{b}_L^{(1)}$ を選んでいる. GP 極限に対応させるには零モードの代わりに凝縮モードを取り出す試験関数列を利用する. 例えば有限体積で規格化された凝縮モード φ_L を選んだ上で

$$\mathsf{b}_L^{(1)}(x) = \overline{\varphi_L(x)}\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}\mathbf{1}_{I_L^d}(x)$$

のように規格化してそのモード方向の平均を取るか, 直接的に消滅作用素 $a(\varphi_L)$ を扱う. このとき次のような状況が生まれる.

- 相固定成分では c 数置換 $\frac{a(\varphi_L)}{V^{\frac{1}{2}}} \to \alpha$ が現れる.
- c 数の空間形 φ は GP 方程式で決まる.

GP の意味は中心変数の空間形が GP 最小化元に集中すると言える. 代数的に言えば相互作用・スケーリング極限の下での次のような振る舞いに帰着する.

- 中心分解の測度 χ に対して, 位相は一様 (U(1) 対称) である.
- 振幅 (凝縮密度) は鋭い：大きな偏差を持つ.
- 凝縮モードは空間的に一意的に選ばれ, 中心変数はそのモードに沿って現れる.

自由・一様系では凝縮モードが定数であるため, ここで選んだ $\mathsf{b}_L^{(1)}$ は実際に一例である. GP では定数ではなく空間分布 φ が現れるだけで, 中心変数としての古典化機構は等価である.

3.7　ゲージ変換・対称性の破れ・クラスター性

任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対してレゾルベント環上の写像

$$\gamma_\theta \colon \mathcal{R}(\mathcal{D}_{0,\beta}) \to \mathcal{R}(\mathcal{D}_{0,\beta}); \quad \gamma_\theta(R(\lambda, f)) = R(\lambda, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} f)$$

をゲージ変換と言う．これは自己同型写像である．

Proposition 3.24. 定義3.1の設定を引き継ぐ．

1. 成分状態 $\psi_{r,\theta}$ は U(1)-ゲージ不変ではない．特に任意の $\theta, \theta_0 \in \mathbb{R}$ に対して
$$\psi_{r,\theta} \circ \gamma_{\theta_0} = \psi_{r,\theta+\theta_0}$$
が成り立つ．これを *BEC* 状態のゲージ対称性の自発的破れと言う．
2. 成分状態の集合 $\{\psi_{r,\theta} \,|\, \theta \in \mathbb{R}\}$ はゲージ変換に対して閉じている．
3. 命題3.7の *BEC* 状態 $\psi_{\mathrm{BEC},\beta}$ は U(1)-ゲージ不変である．

Proof. (1): 一点関数を具体的に計算すればよい．
(2): 本命題 (1) による．
(3): 本命題 (2) による．□

次に成分状態・BEC 状態のクラスター性を調べる．

Proposition 3.25. 1. 成分状態 $\psi_{r,\theta}$ は時間的クラスター性・空間的クラスター性をみたす．

2. 命題3.7の *BEC* 状態 $\psi_{\mathrm{BEC},\beta}$ は $\mathcal{R}\left(\mathcal{D}_{0,\beta} \setminus \mathrm{Ker}\,\mathsf{q}_0\right)$ 上で時間的クラスター性・空間的クラスター性のどちらもみたさない．

本命題 (2) で $\mathcal{D}_{0,\beta} \setminus \mathrm{Ker}\,\mathsf{q}_0$ として $\mathrm{Ker}\,\mathsf{q}_0$ を除外している．証明を見るとわかるように，この条件は証明 (2) で交差項を消すため，クラスター性を成立させる要因として作用する．準双線型形式 q_0 の非自明性が直積分とボース-アインシュタイン凝縮の発現を表すため，核 $\mathrm{Ker}\,\mathsf{q}_0$ 上でのクラスター性回復は重要な意義を持つ．特によく言われる非対角長距離秩序と自発的対称性の破れの直接検証にあたる．

Proof. (1：時間的クラスター性)：二点関数

$$\psi_{r,\theta}\left(R(\lambda, f)\alpha_{\mathrm{fr},u}\left(R(\mu, g)\right)\right) = \psi_{r,\theta}\left(R(\lambda, f) \cdot R\left(\mu, \mathrm{e}^{\mathrm{i}uh} g\right)\right)$$

を計算すると

$$\begin{aligned}
&\psi_{r,\theta}\left(R(\lambda, f)\alpha_{\mathrm{fr},t}\left(R(\mu, g)\right)\right) \\
&= \int_0^{(\mathrm{sgn}\,\lambda)\infty} ds \int_0^{(\mathrm{sgn}\,\mu)\infty} dt\, \mathrm{e}^{-\frac{ist}{2}\mathrm{Im}\langle f, \mathrm{e}^{iuh} g\rangle} \\
&\quad \times \mathrm{e}^{-\left(\lambda - \mathrm{i}\ell_{\beta,r,\theta}(f)\right)s} \mathrm{e}^{-\left(\mu - \mathrm{i}\ell_{\beta,r,\theta}(g)\right)t} \exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}\left(sf + t\mathrm{e}^{\mathrm{i}uh} g\right)\right)
\end{aligned} \tag{30}$$

が得られる．まず $\mathrm{e}^{-\frac{ist}{2}\mathrm{Im}\langle f, \mathrm{e}^{iuh} g\rangle}$ は h の絶対連続性によって $t \to \pm\infty$ で 0 に収束する．
次に $\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}\left(sf + t\mathrm{e}^{\mathrm{i}uh} g\right)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}\left(sf + t\mathrm{e}^{\mathrm{i}uh} g\right) = \mathsf{q}_{\mathrm{nz}}\left(sf\right) + \mathsf{q}_{\mathrm{nz}}\left(tg\right) + 2\,\mathrm{Re}\,\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}\left(sf, t\mathrm{e}^{\mathrm{i}uh} g\right) \\
&\to \mathsf{q}_{\mathrm{nz}}\left(sf\right) + \mathsf{q}_{\mathrm{nz}}\left(tg\right) \quad (u \to \infty)
\end{aligned} \tag{31}$$

が成り立つ．

これらをまとめると

$$
\begin{aligned}
&\lim_{u\to\infty}\psi_{r,\theta}\left(R(\lambda,f)\alpha_{\mathrm{fr},u}\left(R(\mu,g)\right)\right)\\
&=\int_0^{(\operatorname{sgn}\lambda)\infty}ds\int_0^{(\operatorname{sgn}\mu)\infty}dt\\
&\quad\times\mathsf{e}^{-\left(\lambda-\mathrm{i}\ell_{\beta,r,\theta}(f)\right)s}\mathsf{e}^{-\left(\mu t-\mathrm{i}\ell_{\beta,r,\theta}(g)\right)t}\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}\left(sf\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}\left(tg\right)\right)\\
&=\int_0^{(\operatorname{sgn}\lambda)\infty}\mathsf{e}^{-\left(\lambda-\mathrm{i}\ell_{\beta,r,\theta}(f)\right)s}\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}\left(sf\right)\right)ds\\
&\quad\times\int_0^{(\operatorname{sgn}\mu)\infty}\mathsf{e}^{-\left(\mu t-\mathrm{i}\ell_{\beta,r,\theta}(g)\right)t}\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}\left(tg\right)\right)dt\\
&=\psi_{r,\theta}(R(\lambda,f))\cdot\psi_{r,\theta}(R(\mu,g))
\end{aligned}
\tag{32}
$$

が得られる．

(1：空間的クラスター性)：自己同型写像が空間並進群に変わっただけで, 時間的クラスター性と全く同じ計算が成り立つ．

(2：時間的クラスター性)：直積分ではなく命題3.7の形で議論する．証明 (1) の場合と違って q_0 成分がある．定義3.1(2) で $h(0)=0$ を仮定したため, 特に

$$
\mathsf{q}_0\left(sf+t\mathsf{e}^{\mathrm{i}uh}g\right)=\mathsf{q}_0\left(sf\right)+\mathsf{q}_0\left(tg\right)+2\operatorname{Re}\mathsf{q}_0\left(sf,tg\right)=\mathsf{q}_0\left(sf+tg\right)
$$

が成り立つ．この q_0 の交差項の残存によって, 証明 (1) と同じ計算で

$$
\begin{aligned}
&\lim_{u\to\pm\infty}\psi_{\mathrm{BEC},\beta}\left(R(\lambda,f)\alpha_{\mathrm{fr},u}\left(R\left(\mu,g\right)\right)\right)\\
&=\int_0^{(\operatorname{sgn}\lambda)\infty}\int_0^{(\operatorname{sgn}\mu)\infty}\mathsf{e}^{-(\lambda s+\mu t)}\\
&\qquad\times\mathsf{e}^{-\frac{1}{4}\mathsf{q}_0(sf+tg)}\cdot\mathsf{e}^{-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(sf)}\mathsf{e}^{-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(tg)}\,ds\,dt\\
&\neq\psi_{\mathrm{BEC},\beta}\left(R(\lambda,f)\right)\cdot\psi_{\mathrm{BEC},\beta}\left(R(\mu,g)\right)
\end{aligned}
\tag{33}
$$

が得られる．

(2：空間的クラスター性)：これも自己同型写像が空間並進群に変わっただけで, 時間的クラスター性と全く同じ計算が成り立つ． □

3.8 イデアル構造

論文 [6] では, レゾルベントの要素がある表現で 0 または定数に落ちるイデアルを考えている．これはシーガルの場の作用素が無限大であるような表現を考えていると言え, 命題3.16や命題3.19を強めた性質を見ている．さらにボース-アインシュタイン凝縮の特異性を発現する q_0 が非可閉で, 最大の定義域を明確に定めるのが難しいため, 非正則性は $\mathcal{D}_{0,\beta}$ の補空間の一部としてしか特徴づけできない．

しかし

$$
f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R};\quad f(x)=\mathbf{1}_{|x|\geq1}\frac{1}{|x|^3}
$$

はほとんどいたるところでフーリエ変換可能で $f\notin L^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ をみたす．さらに $k\neq0$ 以外でフーリエ変換が有限な値を持ち, 原点での対数発散までわかっている良い関数である．特に一粒子ハミルトニアンに付随する形式で考えるなら, これは $f\notin L^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ かつ $f\in Q(K_\beta)$, つまり $f\notin\mathcal{D}_{0,\beta}$ かつ $f\in\mathcal{H}_\beta$ をみたし, レゾルベントが表現で 0 に潰れる例である．このような関数は他にも大量にあるため $\mathcal{H}_\beta\setminus\mathcal{D}_{0,\beta}$ にボース-アインシュタイン凝縮に関する特異空間の非自明な存在はわかっている．ファン・ホーフェ模型の赤外発散でも同様の議論が展開できる．

3.9 汎関数積分の定式化

ここでは4節の議論を先取りして, ボース-アインシュタイン凝縮の汎関数積分による記述に向けて議論を進める．まずは定理4.12を利用して各成分状態・表現を特異ガウス型 β-マルコフ経路空間として表現する．定義から明確なように全て同じ荒木-ウッズ空間上で表現できているため, 特異ガウス型 β-マルコフ経路空間に関する構成物も共有できる．まずは確率的対象が何になるかを調べ, 測度の分解を確認してから端点分解としてのエルゴード分解を議論する．

Proposition 3.26. 成分状態 $\psi_{r,\theta}$ を考える．

1. 対応する特異ガウス型 β-マルコフ経路空間 $(\mathcal{Q}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, U_t, R, \mu_{r,\theta})$ が存在する．特に $\mathcal{Q}$ は可分なヒルベルト空間で加法族に対して可算生成を仮定でき, 経路空間の構成物のうち $(\mathcal{Q}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, U_t, R)$ は (r,θ) によらない．

2. 対応する測度 $\mu_{r,\theta}$ に対する特性関数は $f \in \mathcal{D}_{0,\beta}$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して
$$\mathbb{E}_{\mu_{r,\theta}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}t\phi(f)}\right] = \exp\left(-\frac{t^2}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(f) + \mathsf{i}t\ell_{\beta,r,\theta}(f)\right) \tag{34}$$
のように書け, 任意の $A \in \mathfrak{S}_0$ に対して対応 $(r,\theta) \mapsto \mu_{r,\theta}(A)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-可測である．

3. 成分状態に対する n 点関数は汎関数積分表示を持つ．特に任意の $0 \le t_1 \le \cdots \le t_n \le \frac{\beta}{2}$ と $F_1, \cdots, F_n \in L^\infty(\mathcal{Q}, \mathfrak{S}_0, \mu_{r,\theta})$ に対して, 定理*4.12*の対応を利用して $T_{\mathrm{E}} F_j T_{\mathrm{E}}^{-1} = \tilde{F}_j$ とすれば
$$\psi_{r,\theta}\left(\alpha_{\mathsf{i}t_1}\left(\tilde{F}_1\right) \cdots \alpha_{\mathsf{i}t_n}\left(\tilde{F}_n\right)\right) = \mathbb{E}_{\mu_{r,\theta}}\left[F_1(\phi_{t_1}) \cdots F_n(\phi_{t_n})\right]$$
が成り立つ．

Proof. (1)：経路空間の構成物：定理4.12を利用すればよい．測度以外の一様性は $\psi_{r,\theta}$ の GNS 表現が一様に荒木-ウッズ表現で, 自己同型群も全て一致している事情による．

(2)：特性関数の表示：状態 $\psi_{r,\theta}$ は q_{nz} に由来する項を共通の共分散に持ち, 補助変数に依存する線型汎関数 $\ell_{\beta,r,\theta}(f)$ を平均とする非中心ガウス測度 $\mu_{r,\theta}$ を与える．これで特性関数の表式が得られた．

証明 (2)：対応 $(r,\theta) \mapsto \mu_{r,\theta}(A)$ の可測性：筒型集合上で $\mu_{r,\theta}$ の分布は特性関数で決まる．右辺は線型汎関数 $\ell_{\beta,r,\theta}(f)$ を通じて (r,θ) にボレル可測的に依存する．筒型集合族は加法族 $\mathfrak{S}_0$ を生成するため, 単調族定理によって一般の $\mathfrak{S}_0$ 上に拡張でき, これで求める可測性が得られる．

(3)：汎関数積分表示：定理4.13による． □

次に中心分解に対応する全系の測度の分解を考える．作用素環上の状態から定まる期待値と確率測度による期待値は相関関数によるアフィン対応がある．特に特異ガウス型 β-マルコフ経路空間では定理4.12によるユニタリ対応によって同型対応でもある．端点性も対応するため, これがどのような集合の端点かを調べる必要がある．

Proposition 3.27. 定義*3.7*の *BEC* 状態 ψ_{BEC} に対応する可測空間は $\left(\mathcal{Q} \times \mathbb{R}^2, \mathfrak{S} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\right)$ で, 確率測度は正則条件つき確率測度から得られる
$$\mu(A \times B) = \int_B \mu_{r,\theta}(A)\, d\chi(r,\theta), \quad A \in \mathfrak{S}_0, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$
である．特に $\mathfrak{S}$-可測で次の積分が意味を持つ範囲の F に対する積分表示
$$\mathbb{E}_\mu[F] = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_{\mu_{r,\theta}}[F]\, d\chi(r,\theta)$$
が成り立つ．

Proof. 命題3.26によって $(r,\theta)\mapsto\mu_{r,\theta}$ は $\mathcal{Q}$ の遷移確率である．この遷移確率を利用して $E\in\mathfrak{S}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ に対して

$$\mu=\int_{\mathbb{R}^2}\mu_{r,\theta}(E_{r,\theta})\,d\chi(r,\theta),\quad E_{r,\theta}=\{q\in\mathcal{Q}\,|\,(q,r,\theta)\in E\}$$

を定める．矩形集合 $C\times D$ に対して

$$(C\times D)_{r,\theta}=\begin{cases}C, & (r,\theta)\in D,\\ \emptyset & (r,\theta)\notin D\end{cases}$$

であるため

$$\mu(C\times D)=\int_D\mu_{r,\theta}(C)\,d\chi(r,\theta)$$

が得られる．あとは遷移確率の可測性と単調族定理によって測度が定まる．

最後に

$$\mu(\mathcal{Q}\times\mathbb{R}^2)=\int_{\mathbb{R}^2}\mu_{r,\theta}(\mathcal{Q})\,d\chi(r,\theta)=\int_{\mathbb{R}^2}1\,d\chi(r,\theta)=1$$

によって μ は確率測度である． □

最終的な汎関数積分表示は次のようにして得られる．

Proposition 3.28. 命題*3.10*で与えた直積分分解は，特異ガウス型 β-マルコフ経路空間による汎関数積分表示を持つ．特に全系の確率測度に対する特性関数は

$$\mathbb{E}_\mu\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}t\phi(f)}\right]=\mathsf{e}^{-\frac{t^2}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(f)}\int_{\mathbb{R}^2}\mathsf{e}^{\mathsf{i}t\ell_{\beta,r,\theta}(f)}\,d\chi(r,\theta) \tag{35}$$

である．

Proof. 汎関数積分表示はここまでの議論，特に命題3.26(3) と命題3.27を組み合わせればよい．

命題3.26(2) と命題3.27によって，特性関数は

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}t\phi(f)}\right]&=\int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{E}_{\mu_{r,\theta}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}t\phi(f)}\right]d\chi(r,\theta)\\&=\int_{\mathbb{R}^2}\mathsf{e}^{-\frac{t^2}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(f)+\mathsf{i}t\ell_{\beta,r,\theta}(f)}\,d\chi(r,\theta)\\&=\mathsf{e}^{-\frac{t^2}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(f)}\int_{\mathbb{R}^2}\mathsf{e}^{\mathsf{i}t\ell_{\beta,r,\theta}(f)}\,d\chi(r,\theta)\end{aligned} \tag{36}$$

である． □

作用素環では全系を直積分分解して成分系を得た．汎関数積分に対しても全系と成分系の対応を定式化する．確率的な全系

$$(\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}},\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}},\mu_{\mathrm{tot}})=\left(\mathcal{Q}\times\mathbb{R}^2,\mathfrak{S}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\mu\right)$$

に対して以下の対象を定める．

1. 部分加法族を $\mathfrak{S}_{\mathrm{tot},0}=\mathfrak{S}_0\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ とする．
2. 4節で定める鏡映 r に対して点変換を $\tilde{R}_{\mathrm{tot}}(f,w)=(rf,w)$ として全系の鏡映 R_{tot} を $R_{\mathrm{tot}}F=F\circ\tilde{R}_{\mathrm{tot}}$ で定める．
3. 時間並進 u_t に対して点変換を $\tilde{U}_{\mathrm{tot}}(f,w)=(u_tf,w)$ として全系の時間並進 U_{tot} を $U_{\mathrm{tot},t}F=F\circ\tilde{U}_{\mathrm{tot}}$ で定める．

さらに全系に対する U_{tot}-不変加法族を

$$\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^{U_{\mathrm{tot}}}=\left\{A\in\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}\,\middle|\,\text{全ての } t\in\mathbb{R} \text{ に対して } U_{\mathrm{tot},t}^{-1}(A)=A \text{ が成り立つ.}\right\}$$

で定め, U_{tot}-不変測度がなす凸集合を

$$\mathrm{Prob}^{U_{\mathrm{tot}}}(\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}})=\left\{\nu\in\mathrm{Prob}(\mathcal{Q}\times\mathbb{R}^2)\,\middle|\,\begin{array}{l}\text{全ての } t\in\mathbb{R} \text{ に対して}\\ \nu\circ U_{\mathrm{tot},t}^{-1}=\nu \text{ が成り立つ.}\end{array}\right\}$$

で定める.

一粒子ハミルトニアンは波数空間で $h(0)=0$ をみたすとしたため, 作用素環の自己同型群の中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_{\mathrm{BEC}})$ に対する作用は自明である. 自己同型群に対応する確率論の対象は時間並進の作用素 U_t で, 確率論から見て U_t が自明になる集合が確率論的な対応物と想定できる. U_{tot}-不変測度の集合 $\mathrm{Prob}^{U_{\mathrm{tot}}}$ の端点集合は U_{tot}-エルゴード測度の集合で, 確率測度のエルゴード性は U_{tot}-不変加法族上での測度の自明性と同値である.

次に作用素環での中心が確率論で何に対応するかを調べる. 特に作用素環の中心と U_{tot}-不変加法族は同一視でき, 測度の分解はエルゴード分解にあたる.

Proposition 3.29. *BEC 表現の中心と* U_{tot}*-不変加法族は同一視できる.*

Proof. 全系の時間並進 U_{tot} は第一成分 $\mathcal{Q}$ に不変部分を持たず, 第二成分 $\mathbb{R}^2$ は完全に不変である. BEC 表現の中心は $\mathbb{R}^2$ 上の L^∞-空間だから, この意味で一致が見られる. □

命題3.26(2) での特性関数

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\phi(f)}=\exp\left(-\frac{t^2}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(f)+\mathrm{i}t\ell_{\beta,r,\theta}(f)\right)$$

は (r,θ) が全系の非自明な不変情報の全てで平均だけに現れる事情を保証し, 条件つき確率の同定の正当化に利用できる.

Proposition 3.30. *不変集合* $\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^{U_{\mathrm{tot}}}$ *は全系の第二成分としての* $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ *に対して* $\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^{U_{\mathrm{tot}}}=\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *が成り立つ. 特に命題3.27での測度の分解はエルゴード分解で, 作用素環的な BEC 状態の端点分解に対応する端点分解である.*

Proof. 包含 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\subset\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^{U_{\mathrm{tot}}}$ は時間並進 U_{tot} が (r,θ) を動かさない事情による.

次に逆の包含 $\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^{U_{\mathrm{tot}}}\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を調べる. 任意の $A\in\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^{U_{\mathrm{tot}}}$ が全系の測度 μ に関してほとんど確実に $\mathbf{1}_A(q,r,\theta)=g(r,\theta)$ と表せるような可測な g の存在を示せばよい. 条件つき期待値を取ると $\mathbf{1}_A=\mathbb{E}_\mu\left[\mathbf{1}_A\middle|\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^{U_{\mathrm{tot}}}\right]$ が成り立つ. フォン・ノイマン環の中心に由来するボレル加法族 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を r,θ で表すと, 前段の包含によって

$$\mathbb{E}_\mu\left[\mathbf{1}_A\middle|\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^{U_{\mathrm{tot}}}\right]=\mathbb{E}_\mu\left[\mathbf{1}_A\middle|\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\right]=\mathbb{E}_\mu\left[\mathbf{1}_A|r,\theta\right]$$

が成り立つ. したがって

$$\mathbf{1}_A=\mathbb{E}_\mu\left[\mathbf{1}_A|r,\theta\right]\quad(\mu\text{-a.s.})\tag{37}$$

が成り立つ. 命題3.27での構成によって, ディラック測度を $\delta_{r,\theta}$ とすれば

$$\mu\left(\cdot|r,\theta\right)=\mu_{(r,\theta)}\otimes\delta_{(r,\theta)}$$

が成り立つ. したがって

$$\mathbb{E}_\mu\left[\mathbf{1}_A|r,\theta\right]=\mu_{r,\theta}(A_{r,\theta}),\quad A_{r,\theta}=\{q\in\mathcal{Q}\,|\,(q,r,\theta)\in A\}$$

は q によらない. 式(37)によって μ に関してほとんど確実に $\mathbf{1}_A(q,r,\theta)$ は q によらない関数である. これは $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を意味する.

最後にエルゴード分解を調べる. 不変測度の不変加法族に対する条件つき確率はエルゴードである. ここでは $\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^{U_{\mathrm{tot}}}=\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ で, 条件つき確率は $\mu_{r,\theta}\otimes\delta_{r,\theta}$ である. 先の積分表示は命題3.27の積分表示に帰着するため, 特にこれは不変測度の集合 $\mathrm{Prob}^{U_{\mathrm{tot}}}$ 上でのエルゴード分解である. □

4 特異ガウス型 β-マルコフ経路空間

本節で教科書 [9, Chapter 21, Section 21.4] 節の一般化である点を鑑み, ここまでとは違う記号を利用する. 明確化のため以下の議論で一粒子ハミルトニアン ϵ は $\varepsilon(k) = |k|^s$ を仮定しているものの適切に一般化できる.

4.1 基本設定

次節の汎関数積分の定式化に向けて教科書 [9, Chapter 21, Section 21.4] 節の記述を一般化する. 特に一粒子ハミルトニアンに対する制約 $\epsilon > 0$ を $\epsilon \geq 0$ に拡張する. この特異性を処理するための正則化に伴って上掲書とは一部定義を変えて議論する.

一般にヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のボソンフォック空間を $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes_{\mathrm{s}}^{n} \mathcal{H}$ で定め, 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対してボソンフォック空間上の生成・消滅作用素を $a_{\mathrm{F}}^{\#}(f)$ とする. シーガルの場の作用素は

$$\phi_{\mathrm{F}}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_{\mathrm{F}}^{*}(f) + a_{\mathrm{F}}(f) \right)$$

で定義し, ワイル作用素 $W_{\mathrm{F}}(f) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{F}}(f)}$ のフォック真空 Ω_{F} での期待値は $\langle \Omega_{\mathrm{F}}, W_{\mathrm{F}}(f)\Omega_{\mathrm{F}} \rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\|f\|^2}$ とする. これ以外は以下で順に定式化する.

Definition 4.1. 次の条件をみたす六つ組 $(\mathcal{Q}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, U_t, R, \mu)$ を一般化経路空間という.

1. 三つ組 $(\mathcal{Q}, \mathfrak{S}, \mu)$ は完備な確率空間である.
2. 集合族 $\mathfrak{S}_0$ は $\mathfrak{S}$ の部分加法族である.
3. 一径数群 $U = \{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は $L^{\infty}(\mathcal{Q}, \mathfrak{S}, \mu)$ の保測な $*$-自己同型写像である. さらに σ-弱位相に関して強連続である. 単に U_t とも書く.
4. 鏡映：写像 R は $RU_t = U_{-t}R$ と $R^2 = 1$ をみたす $L^{\infty}(\mathcal{Q}, \mathfrak{S}, \mu)$ の保測な $*$-自己同型写像である.

さらに $\mathfrak{S} = \bigvee_{t\in\mathbb{R}} U_t \mathfrak{S}_0$ を仮定する. これを生成条件と言う.

Definition 4.2. 一般化経路空間を $(\mathcal{Q}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, U_t, R, \mu)$ とする.

1. もし $U_\beta = 1$ で $S_\beta \ni t \mapsto U_t$ が強連続なユニタリ群なら, 経路空間は β-周期的という.
2. 経路空間が β-周期的だとする. これが次の二条件をみたすとき, 経路空間は β-マルコフ的と言う.
   (a) 鏡映と条件つき期待値は $R\mathbb{E}_{\{0,\frac{\beta}{2}\}} = \mathbb{E}_{\{0,\frac{\beta}{2}\}}$ をみたす. これを β-鏡映性という.
   (b) 条件つき期待値は
   $$\mathbb{E}_{[0,\frac{\beta}{2}]}\mathbb{E}_{[-\frac{\beta}{2},0]} = \mathbb{E}_{\{0,\frac{\beta}{2}\}}$$
   をみたす. これを β-マルコフ性と言う.

物理的なヒルベルト空間を

$$\mathcal{H} = \mathbb{E}_{\{0,\frac{\beta}{2}\}} L^2(\mathcal{Q}, \mathfrak{S}, \mu) = L^2\left(\mathcal{Q}, \mathfrak{S}_{\{0,\frac{\beta}{2}\}}, \mu\right)$$

で定め, 定数関数 $1 \in \mathcal{H}$ を Ω と書いて熱的真空と言い, 熱的真空が定めるベクトル状態 ω を熱的真空状態と言う. さらに $\mathcal{H}$ に作用する可換フォン・ノイマン環として $\mathcal{N} = L^{\infty}\left(\mathcal{Q}, \mathfrak{S}_{\{0\}}, \mu\right)$ を定める. これは $\mathcal{A}$ と書く場合もある.

可分な実ヒルベルト空間 $\mathcal{X} = L^2\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)$ 上で補助変数 $s > 0$ を持つ非負自己共役作用素 ϵ_s は波数空間で $\epsilon_s(k) = |k|^s$ のように表せているとし, 付随する作用素として

$$\rho_s = \left(\mathrm{e}^{\beta\epsilon_s} - 1\right)^{-1}, \quad K_{\beta,s} = \coth\frac{\beta\epsilon_s}{2} \geq 0$$

を定める. この $K_{\beta,s}$ に付随する準双線型形式を $\mathsf{q}_{\mathrm{nz},\beta,s}$ とし, 準双線型形式が定める内積で形式の定義域 $Q(\mathsf{q}_{\mathrm{nz},\beta,s})$ を完備化した実ヒルベルト空間を $\mathcal{X}_{\beta,s}$ とする.

記述を簡潔にするため $S_\beta = \left[-\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}\right]$ に対して実ヒルベルト空間

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\beta,s} = L^2\left(S_\beta;\mathcal{X}_{\beta,s}\right) \cong L^2\left(S_\beta;\mathbb{R}\right) \otimes \mathcal{X}_{\beta,s}$$

を定め, β-周期的な境界条件を持つ共分散

$$C_s = \left(D_t^2 + \epsilon_s^2\right)^{-1}, \quad D_t = \overline{-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}}$$

を定める.

Remark 4.3. 上記の記号で明示したように一粒子ハミルトニアンの s の依存する量には本来 s を添えるべきである. しかし以下の議論では ϵ_s を含めて明示の必要がない限り原則として添字 s を省略する.

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$ とすると, 共分散はフーリエ変換のもとで

$$C(\omega_n, k) = \frac{1}{\omega_n^2 + |k|^{2s}}$$

のように書ける.

Lemma 4.4. 波数空間上の関数 T を

$$T(\omega, k) = \frac{|k|^{2a} \wedge 1}{\left(\omega^2 + |k|^{2s}\right)(1+\omega^2)^r\left(1+|k|^2\right)^u}$$

で定める. このときトレース型条件

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^d} T(\omega_n, k)\, dk < \infty, \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$$

の十分条件として次の評価が得られる.

- 時間方向：$r > \frac{1}{2}$.
- 紫外方向：$2(u+s) > d$.
- 赤外方向：$a > s - \frac{d}{2}$.

Proof. 時間方向は n の和として ω で制御される項で, $\frac{1}{(1+\omega^2)^r}$ が生き残ればよい. 特に $\frac{1}{(1+\omega^2)^r}$ の和が単独で収束すれば十分であるため, $r > \frac{1}{2}$ を仮定すればよい.

波数が十分大きい領域では $R > 1$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{|k|>R} T(\omega, k)\, dk &\sim \int_R^\infty \frac{1}{|k|^{2s}\cdot|k|^{2u}}\,|k|^{d-1}\,d\,|k| \\ &= \int_R^\infty k^{d-1-2(s+u)}\,dk < \infty\end{aligned} \tag{38}$$

でなければならない. したがって $d-1-2(s+u)<-1$ によって条件 $2(s+u)>d$ が得られる. 赤外方向では

$$\int_0^1 T(0,k)\,dk \sim \int_0^1 \frac{k^{2a}}{k^{2s}} k^{d-1}\,dk = \int_0^1 |k|^{2(a-s)+d-1}\,dk < \infty$$

によって $2(a-s)+d-1>-1$ でなければならない. これを整理すれば $a>s-\frac{d}{2}$ が得られる. □

補題4.4のトレース型指数の制約をみたすように, 実ヒルベルト空間 $\mathcal{K}=L^2(S_\beta;\mathcal{X})$ 上の正則化作用素 B をフーリエ変換が

$$B(\omega,k)=\frac{\left(1+\omega^2\right)^r\left(1+|k|^2\right)^u}{|k|^{2a}\wedge 1},\quad B(\omega,k)^{-1}=\frac{|k|^{2a}\wedge 1}{\left(1+\omega^2\right)^r\left(1+|k|^2\right)^u}$$

をみたす関数によるかけ算作用素として定める. 特に三次元の場合は同じく補題4.4の記号のもとで

$$r=1,\quad u=2,\quad a=\begin{cases}0, & s=1,\\ 1, & s=2\end{cases}$$

とする. この B を利用して

$$\mathcal{Q}_\#=\operatorname{dom}B^{\frac{1}{2}}\subset\mathcal{K},\quad \|f\|_{\mathcal{Q}_\#}=\left\|B^{\frac{1}{2}}f\right\|_{\mathcal{K}}$$

とする. 一方 $\mathcal{Q}$ はノルム $\|u\|_{\mathcal{Q}}=\left\|B^{-\frac{1}{2}}u\right\|_{\mathcal{K}}$ による $\operatorname{dom}B^{-\frac{1}{2}}$ の完備化, つまり

$$\mathcal{Q}=\overline{\operatorname{dom}B^{-\frac{1}{2}}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}}$$

で定める. 空間 $\mathcal{Q}$ は可分なヒルベルト空間であるため, 特にボレル加法族は可算生成としてよい.

Remark 4.5. 三次元での設定は $s=1$ ではファン・ホーフェ模型でボース-アインシュタイン凝縮と赤外発散が両方起きるように, $s=2$ では同じくファン・ホーフェ模型で赤外発散によってボース-アインシュタイン凝縮が物理量がなす環の上で潰されるように具体的に設定した. 他の場合も都合に応じてさらに具体的な指数を選べる.

実ヒルベルト空間 $\mathcal{Q}$ 上のガウス測度 μ の存在を示そう.

Proposition 4.6. 実ヒルベルト空間 $\mathcal{Q}$ 上にガウス測度 μ が存在する. 特に共分散 C に付随する準双線型形式 $\mathsf{q}(f)=\left\|C^{\frac{1}{2}}f\right\|_{\mathcal{K}}^2$ に対して特性汎関数は

$$\mathbb{E}_\mu\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}\right]=\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}(f)\right),\quad f\in\mathcal{Q}_\#$$

である.

Proof. 正則化作用素 B を利用して作用素 T を $T=B^{-\frac{1}{2}}CB^{-\frac{1}{2}}$ で定める. 補題4.4によって T は $\mathcal{K}=L^2(S_\beta;\mathcal{X})$ 上のトレース型作用素である. ミンロス-サゾノフの定理によって可測空間 $(\mathcal{Q},\mathcal{B}(\mathcal{Q}))$ 上に一意的な中心化ガウス測度 μ が取れる. 特にその特性汎関数は

$$\mathbb{E}_\mu\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}\right]=\int_{\mathcal{Q}}\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}\,d\mu(\phi)=\mathsf{e}^{-\frac{1}{4}\mathsf{q}(f)},\quad f\in\mathcal{Q}_\#$$

をみたす. □

教科書 [9, p.633, Subsection21.4.5, Lemma21.51] 周辺にある対象を定式化する.

Lemma 4.7. 任意の $t \in S_\beta$ に対して写像 j_t を

$$j_t \colon \mathcal{R} \to \mathcal{Q}_\#; \quad j_t g = \delta_t \otimes g, \quad \mathcal{R} = \left(2\epsilon \tanh \frac{\beta\epsilon}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{X} \tag{39}$$

で定める. このとき $g_1, g_2 \in \mathcal{R}$ に対して

$$\langle j_{t_1} g_1,\, j_{t_2} g_2 \rangle_{\mathcal{Q}_\#} = \left\langle g_1,\, \frac{\mathrm{e}^{-|t_1 - t_2|\epsilon} + \mathrm{e}^{-(\beta - |t_1 - t_2|)\epsilon}}{2\epsilon(1 - \mathrm{e}^{-\beta\epsilon})} g_2 \right\rangle_{\mathcal{X}} \tag{40}$$

が成り立つ. 特に定義域 $\mathcal{R} = \left(2\epsilon \tanh \frac{\beta\epsilon}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{X}$ の内積を

$$\langle g_1,\, g_2 \rangle_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \left\langle g_1,\, \frac{1}{\epsilon} \coth\left(\frac{\beta\epsilon}{2} \right) g_2 \right\rangle_{\mathcal{X}}$$

とすれば j_t は等距離作用素である.

Proof. 離散フーリエ変換

$$L^2(S_\beta) \ni f \mapsto (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{Z}); \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{S_\beta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi n t}{\beta}} f(t)\, dt$$

と

$$\frac{1}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi n t}{\beta}}}{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \epsilon^2} = \frac{\mathrm{e}^{-|t|\epsilon} + \mathrm{e}^{-(\beta - |t|)\epsilon}}{2\epsilon\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta\epsilon}\right)} = \frac{\mathrm{e}^{-|t|\epsilon}}{2\epsilon} K_\beta \tag{41}$$

を利用すればよい. □

任意の $t \in \mathbb{R}$ と $I \subset \mathbb{R}$ に対して条件つきの空間・作用素

$$\mathcal{Q}_{\#_t}, \quad e_t, \quad e^t, \quad \mathcal{Q}_{\#_I}, \quad e_I, \quad e^I$$

を定める. 空間 $\mathcal{Q}_{\#_t}, \mathcal{Q}_{\#_I}$ と作用素 e_t, e_I は任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{Q}_{\#_t} = \mathrm{Ran}\, j_t = j_t \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} = \left(2\epsilon \tanh \frac{\beta\epsilon}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{X}$$

とし, この $\mathcal{Q}_{\#_t}$ への射影作用素を $e_t = j_t j_t^\# \colon \mathcal{Q}_\# \to \mathcal{Q}_{\#_t}$ で定める. さらに任意の $I \subset \mathbb{R}$ に対して $\mathcal{Q}_{\#_I} = \overline{\sum_{t \in I} \mathcal{Q}_{\#_t}}$ とし, この空間への射影を $e_I \colon \mathcal{Q}_\# \to \mathcal{Q}_{\#_I}$ とする.

作用素 e^t と e^I は命題 [9, p.634, Subsection21.4.5, Proposition21.54] の性質を持つ作用素として直接的に定める. 特に $t, t_1, t_2 \in S_\beta$ と $f \in \mathcal{Q}$ に対して作用素 e^t と $e^{[t_1, t_2]}$ は

$$\begin{aligned}
&\left(e^t f\right)(s) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-|t-s|\epsilon}\left(\mathrm{e}^{\beta - \epsilon} - 1\right) + \mathrm{e}^{|t-s|\epsilon}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta\epsilon}\right)}{\mathrm{e}^{\beta\epsilon} - \mathrm{e}^{-\beta\epsilon}} f(t), \\
&\left(\mathrm{e}^{[t_1, t_2]} f\right)(s) = \mathbf{1}_{[t_1, t_2]}(s) f(s) \\
&\quad + \mathbf{1}_{[-\frac{\beta}{2}, t_1]}(s) \frac{\sinh\left((s + \beta - t_2)\epsilon\right) f(t_1) - \sinh\left((s - t_1)\epsilon\right) f(t_2)}{\sinh\left(\beta + t_1 - t_2\right)\epsilon} \\
&\quad + \mathbf{1}_{[t_2, \frac{\beta}{2}]}(s) \frac{\sinh\left((s - t_2)\epsilon\right) f(t_1) - \sinh\left((s - \beta - t_1)\epsilon\right) f(t_2)}{\sinh\left(\beta + t_1 - t_2\right)\epsilon}
\end{aligned} \tag{42}$$

で定める.

任意の $f \in \mathcal{Q}_{\#}$ と $s, t \in S_\beta$ に対して, 空間 $\mathcal{Q}_{\#}$ 上の鏡映 r と時間並進 u_t を

$$(rf)(s) = f(-s), \quad (u_t f)(s) = f(s-t)$$

で定める.

次に条件つき対象の基本的な性質を調べる.

Proposition 4.8. 条件 $t_1 < t_2$ をみたす任意の $t, t_1, t_2 \in S_\beta$ を固定する. このとき以下の言明が成り立つ.

1. 集合 $C_{\mathrm{c}}^\infty((t_1,\, t_2); \mathrm{dom}\,\epsilon)$ は $\mathcal{Q}_{\#(t_1,\, t_2)}$ で稠密である.

2. 写像 $\mathbb{R} \ni t \mapsto u_t$ は $\mathcal{Q}_{\#}$ 上の直交 β-周期的 C_0-半群である.

3. 鏡映 r は

$$ru_t = u_t r, \quad r^2 = 1$$

をみたす直交作用素である.

4. 集合 $\sum_{t \in S_\beta} u_t \mathcal{Q}_{\#0}$ は $\mathcal{Q}_{\#}$ で稠密である.

5. 鏡映と射影に対する等式 $re_0 = e_0$ が成り立つ.

6. 射影に対する等式

$$e_{[0,\, \frac{\beta}{2}]} e_{[-\frac{\beta}{2},\, 0]} = e_{\{0, \frac{\beta}{2}\}}$$

が成り立つ.

Proof. (1)：定義 $\mathcal{Q}_{\#} = \mathrm{dom}\, B^{\frac{1}{2}}$ に注意する. かけ算作用素 $B^{\frac{1}{2}}$ は ω, k に関する多項式的な荷重で, $\mathcal{Q}_{\#}$ は時間方向・空間方向ともにソボレフ型の空間と同値なノルムを持つ. 標準的な軟化子による正則化と, 台を $(t_1,\, t_2)$ に押し込む滑らかなこぶ型切断を組み合わせればよい.

(2): 作用素 u_t はルベーグ測度 (円周 S_β 上の平行移動不変測度) を保つ. 特に u_t は $\mathcal{K}$ の等距離作用素である. 時間並進に由来するため周期性も明らかである. 定義によって B はかけ算作用素である. 時間並進は時間方向での位相因子の積に対応するため ω の関数としての B と可換である. したがって $\mathrm{dom}\, B^{\frac{1}{2}}$ 上で $B^{\frac{1}{2}} u_t = u_t B^{\frac{1}{2}}$ が成り立つ. 特に $f \in \mathcal{Q}_{\#}$ なら $B^{\frac{1}{2}} f \in \mathcal{K}$ が得られ $B^{\frac{1}{2}} u_t f = u_t B^{\frac{1}{2}} f \in \mathcal{K}$ である. これは $u_t f \in \mathcal{Q}_{\#}$ と

$$\|u_t f\|_{\mathcal{Q}_{\#}} = \left\| B^{\frac{1}{2}} u_t f \right\|_{\mathcal{K}} = \left\| u_t B^{\frac{1}{2}} f \right\|_{\mathcal{K}} = \left\| B^{\frac{1}{2}} f \right\|_{\mathcal{K}} = \|f\|_{\mathcal{Q}_{\#}}$$

が得られる. したがって u_t は $\mathcal{Q}_{\#}$ でも等距離作用素または射影作用素である. 強連続性 (C_0-性) は $\mathcal{K}$ 上での強連続性と $B^{\frac{1}{2}}$ との可換性による.

(3): 明らかである.

(4): 定義によって $\mathcal{Q}_{\#t} = \mathrm{Ran}\, j_t$ である. 作用素 u_t は時間並進だから $u_t \mathcal{Q}_{\#0} = \mathcal{Q}_{\#t}$ が得られる：直観的には $u_t(\delta_0 \otimes g) = \delta_t \otimes g$ である. これは $\sum_{t \in S_\beta} u_t \mathcal{Q}_{\#0} = \sum_{t \in S_\beta} \mathcal{Q}_{\#t}$ を意味する.

同じく定義によって $\mathcal{Q}_I = \overline{\sum_{t \in I} \mathcal{Q}_{\#t}}$ で定めた. 特に $I = S_\beta$ とすれば上式の右辺は $\mathcal{Q}_{\#S_\beta}$ を生成する. 構成上 $\mathcal{Q}_{\#S_\beta} = \mathcal{Q}_{\#}$ であるため, 求める結果が得られる.

(5): 時間反転は $0 \mapsto 0$ をみたすため $r\mathcal{Q}_{\#0} = \mathcal{Q}_{\#0}$ でなければならない. 直交作用素 r が閉部分空間を保つとき, その閉部分空間に対する射影と可換である. さらに $\mathcal{Q}_{\#0}$ 上で r は恒等作用素であるため $re_0 = e_0$ が得られる.

(6): まず $g = e_{[-\frac{\beta}{2}, 0]} f$ とする. 定義によって空間 $\mathcal{Q}_{\#I}$ の挙動を調べればよい. 同じく定義によって円周 S_β に対して

$$\left[0, \frac{\beta}{2}\right] \cap \left[-\frac{\beta}{2}, 0\right] = \left\{0, \frac{\beta}{2}\right\}$$

が成り立つ.

したがって

$$\mathcal{Q}_{\#[0,\frac{\beta}{2}]} \cap \mathcal{Q}_{\#[-\frac{\beta}{2},0]} = \overline{\mathcal{Q}_{\#0} + \mathcal{Q}_{\#\frac{\beta}{2}}} = \mathcal{Q}_{\#\{0,\frac{\beta}{2}\}}$$

が成り立つ. これを射影に翻訳すればよい. $\square$

教科書 [9, p.634, Subsection21.4.6] での特異な共分散 C を持つガウス型 $\mathbf{L}^2$ 空間を定式化する. 特に形式記法

$$\mathbf{L}^2\left(\mathcal{K}, \mathsf{e}^{\phi\cdot C^{-1}\phi}\,d\phi\right), \quad \mathcal{K} = L^2\left(S_\beta, \mathcal{X}\right) \tag{43}$$

で表される共分散 C を持つ, ガウス超過程を実現するようなガウス型 $\mathbf{L}^2$ 空間として正則化作用素 B で定義された $\mathcal{Q}$ と, 命題4.6の μ を利用して具体的に構成された空間 $L^2(\mathcal{Q}, d\mu)$ を指定する. 誤解の恐れがない限り $\mathcal{K}$ の一般的な変数を断りなく ϕ で表す. さらに鋭時刻場として任意の

$$s \in S_\beta, \quad g \in \mathcal{R} = \left(2\epsilon\tanh\frac{\beta\epsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathcal{X}$$

に対して

$$\phi_s(g) = \phi(j_s g) = \phi(\delta_s \otimes g) \in \bigcap_{1\le p<\infty} L^p\left(\mathcal{Q}_\#\right), \quad \phi \in \mathcal{Q}$$

を定める.

この空間上の鏡映と時間発展を定める. 先に定めた r と u_t を利用して, まず $\tilde{r}\phi \in \mathcal{Q}$ と $\tilde{u}_t\phi \in \mathcal{Q}$ を双対性内積を経由して

$$\langle \tilde{r}\phi,\, f\rangle_{\mathrm{dual}} = \langle \phi,\, rf\rangle_{\mathrm{dual}}, \quad \langle \tilde{u}_t\phi,\, f\rangle_{\mathrm{dual}} = \langle \phi,\, u_t f\rangle_{\mathrm{dual}}$$

で定める. さらに $F \in L^\infty(Q, \mu)$ に対して鏡映 R と時間発展 U_t を

$$(RF)(\phi) = F(\tilde{r}\phi), \quad (U_tF)(\phi) = F(\tilde{u}_t\phi)$$

で定め, 線型性と稠密性で $L^2(\mathcal{Q}, d\mu)$ に拡張する.

さらに標本空間 $\mathcal{Q}$ 上の加法族と条件つき期待値を定める. 特に標本空間 $\mathcal{Q}$ 上で時刻 0 の加法族を

$$\mathfrak{S}_0 = \sigma\left(\left\{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(j_0 g)}\,\middle|\, g \in \mathcal{R}\right\}\right), \quad \mathcal{R} = \left(2\epsilon\tanh\frac{\beta\epsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathcal{X}$$

で定め, 全加法族 $\mathfrak{S}$ は $\mathcal{Q}$ のボレル加法族の μ-完備化で定める. さらに任意の $t \in \mathbb{R}$ と $I \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\mathfrak{S}_t = U_t\mathfrak{S}_0, \quad \mathfrak{S}_I = \bigvee_{t\in I}\mathfrak{S}_t$$

とし, これらに対する条件つき期待値を $\mathbb{E}_t$ または $\mathbb{E}_I$ とする.

指数型筒型関数への条件つき期待値の作用も調べよう.

Lemma 4.9. 任意の $I \subset S_\beta$ を固定する. このとき任意の $f \in \mathcal{Q}_\#$ に対して

$$\mathbb{E}_I\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)} = \exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}\left((1-e_I)f\right)\right)\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(e_I f)}$$

が成り立つ.

Proof. 空間 $\mathcal{Q}_\#$ 上の内積は q で表される. 特に特性汎関数から $\mathbb{E}_\mu[\phi(f)\phi(g)] = \frac{1}{2}\mathsf{q}(f,g) = \frac{1}{2}\langle f,\, g\rangle_{\mathcal{Q}_\#}$ が成り立つ. 作用素 e_I は $\mathcal{Q}_\#$ の直交射影であるため $(1-e_I)f \perp \mathcal{Q}_{\#I}$ をみたす. したがって任意の $h \in \mathcal{Q}_{\#I}$ に対して

$$\mathbb{E}_\mu[\phi((1-e_I)f)\phi(g)] = 0$$

が成り立つ．中心ガウス族に対して共分散の消滅と独立性は同値だから，$\phi((1-e_I)f)$ は $\sigma\left(\left\{\phi(h)\,\middle|\,h\in\mathcal{Q}_{\#_I}\right\}\right)$ と独立で，$\mathfrak{S}_I$ とも独立である．したがって

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_I\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)} &= \mathbb{E}_I\left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(e_If)}\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi((1-e_I)f)}\right) = \mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(e_If)}\mathbb{E}_I\left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi((1-e_I)f)}\right)\\ &= \mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(e_If)}\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}((1-e_I)f)\right)\end{aligned} \tag{44}$$

によって求める結果が得られた． □

4.2 β-マルコフ経路空間の構成

Proposition 4.10. ここまでの加法族と鏡映 R・時間発展 U_t に対して $(\mathcal{Q},\mathfrak{S},\mathfrak{S}_0,U_t,R,\mu)$ は β-マルコフ経路空間である．

Proof. まず一般化経路空間の定義 (1)-(2) と生成条件は明らかである．

一般化経路空間 (3) の一径数群 U の $*$-自己同型性は明らかである．

保測性は $\mu\circ\tilde{u}_t^{-1}=\mu$ を示せばよい．命題4.6によって，測度 μ は $f\in\mathcal{Q}_\#$ に対して

$$\mathbb{E}_\mu\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}\right]=\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}(f)\right)$$

で定義される．定義によって $\phi(f)\circ\tilde{u}_t=(\tilde{u}_t\phi)(f)=\phi(u_tf)$ が成り立つから

$$\mathbb{E}_\mu\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}\circ\tilde{u}_t\right]=\mathbb{E}_\mu\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(u_tf)}\right]=\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}(u_tf)\right)$$

が成り立つ．したがってあとは $\mathsf{q}(u_tf)=\mathsf{q}(f)$ を示せばよい．時間並進 u_t はフーリエ級数の係数に位相因子 $\mathsf{e}^{-\mathsf{i}\omega_nt}$ をかける作用素で，共分散 C と可換である．したがって

$$\mathsf{q}(u_tf)=\left\|C^{\frac{1}{2}}u_tf\right\|_{\mathcal{K}}^2=\left\|u_tC^{\frac{1}{2}}f\right\|_{\mathcal{K}}^2=\left\|C^{\frac{1}{2}}f\right\|_{\mathcal{K}}^2=\mathsf{q}(f)$$

が成り立つ．

σ-弱位相に関する強連続性を示すには L^2-ノルム連続性を示せばよい．任意の $f\in\mathcal{Q}_\#$ に対して指数型筒型関数 $\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}$ を考えると

$$\begin{aligned}&\left\|U_t\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}-\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}\right\|_{L^2(\mu)}^2=\mathbb{E}_\mu\left[\left|\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(u_tf)}-\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}\right|^2\right]\\ &=2-2\operatorname{Re}\mathbb{E}_\mu\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(u_tf-f)}\right]\end{aligned} \tag{45}$$

が成り立つ．あとは特性汎関数の評価によって

$$\begin{aligned}&\left\|U_t\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}-\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}\right\|_{L^2(\mu)}^2=2-2\operatorname{Re}\mathbb{E}_\mu\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(u_tf-f)}\right]\\ &=2-2\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}(u_tf-f)\right)\xrightarrow{t\to0}0\end{aligned} \tag{46}$$

が得られる．指数型筒型関数は $L^2(\mathcal{Q},\mu)$ で稠密で，稠密な集合上での L^2-連続性によって U_t は強連続である．

一般化経路空間 (4) を議論する．鏡映と時間発展に対する $RU_t=U_{-t}R$ と $R^2=1$，さらに R の $*$-自己同型性は明らかである．

以下保測性を示す．これは $\mu\circ\tilde{r}^{-1}=\mu$ を示せばよい．一般化経路空間の定義 (3) の議論と同じく $f\in\mathcal{Q}_\#$ に対して

$$\mathbb{E}_\mu\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}\circ\tilde{r}\right]=\mathbb{E}_\mu\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(rf)}\right]=\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}(rf)\right)$$

が成り立つ．写像 r は $\mathcal{Q}_{\#}$ 上で $r^2=1$ をみたす．共分散作用素はフーリエ変換で ω_n^2 の関数だから鏡映で不変である．したがって r は C と可換で $\mathsf{q}(rf)=\mathsf{q}(f)$ が得られる．特性汎関数が鏡映だから μ も鏡映不変である．

β-マルコフ経路空間の定義 (1) を示す．まず u_t は $\mathcal{Q}_{\#}$ 上の直交的な β-周期的 C_0-半群だから $u_\beta=1$ をみたす．双対性の定義によって $\tilde{u}_\beta=1$ だからほとんど確実に $U_\beta F=F$ をみたす．先の議論によって U_t は保測な $*$-自己同型写像だから L^2-空間上では等距離作用素である．先に L^2-強連続性も示したため, 求める β-周期性が得られた．

β-マルコフ経路空間の定義 (2-1) を示す．まず $\mathfrak{S}_{\{0,\frac{\beta}{2}\}}=\mathfrak{S}_0\vee\mathfrak{S}_{\frac{\beta}{2}}$ への条件つき期待値を $\mathbb{E}_{\{0,\frac{\beta}{2}\}}$ とする．定義によって $\mathfrak{S}_0$ は鏡映不変である．円周の端点同一視によって $-\frac{\beta}{2}=\frac{\beta}{2}$ を同一視するため $\mathfrak{S}_{\frac{\beta}{2}}$ も鏡映不変である．特に任意の $\mathfrak{S}_{\{0,\frac{\beta}{2}\}}$-可測な有界関数 G に対してほとんど確実に $RG=G$ が成り立つ．任意の $F\in L^2(\mathcal{Q},\mu)$ と $\mathfrak{S}_{\{0,\frac{\beta}{2}\}}$-可測な有界関数 G に対して, 鏡映 R の保測性によって

$$\mathbb{E}_\mu\left[G\cdot(RF)\right]=\mathbb{E}_\mu\left[(RG)\cdot F\right]=\mathbb{E}_\mu\left[G\cdot F\right]$$

が成り立つ．条件つき期待値の特徴づけによって, 条件つき期待値を射影作用素とみなすと $\mathbb{E}_{\{0,\frac{\beta}{2}\}}(RF)=\mathbb{E}_{\{0,\frac{\beta}{2}\}}F$ が成り立つ．ここから $\mathbb{E}_{\{0,\frac{\beta}{2}\}}R=\mathbb{E}_{\{0,\frac{\beta}{2}\}}$ が得られ, 共役を取れば求める $R\mathbb{E}_{\{0,\frac{\beta}{2}\}}=\mathbb{E}_{\{0,\frac{\beta}{2}\}}$ が成り立つ．

β-マルコフ経路空間の定義 (2-2) を示す．任意の $f\in\mathcal{Q}_{\#}$ に対して $F=\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}$ とし，この F に対する作用の等価性を議論すればよい：あとは線型性・稠密性・有界性で全体に拡張できる．任意の $I\subset S_\beta$ に対して, 定義によって $\mathcal{Q}_{\#I}\subset\mathcal{Q}_{\#}$ で, 直交射影 $e_I\colon\mathcal{Q}_{\#I}\to\mathcal{Q}_{\#}$ を定めている．補題4.9を $I=\left[-\frac{\beta}{2},0\right]$ に適用すれば

$$\mathbb{E}_IF=\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}\left(\left(1-e_I\right)f\right)\right)\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(e_If)}$$

が成り立つ．次に $J=\left[0,\frac{\beta}{2}\right]$ として, 上式に $\mathbb{E}_J$ を作用させて再び補題4.9を利用すると

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_J\mathbb{E}_IF&=\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}\left(\left(1-e_I\right)f\right)\right)\cdot\mathbb{E}_J\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(e_If)}\\&=\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}\left((1-e_If)\right)\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}\left((1-e_J)e_If\right)\right)\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(e_Je_If)}\end{aligned}\tag{47}$$

が成り立つ．命題4.8(6) によって $K=\left\{0,\frac{\beta}{2}\right\}$ とすれば $e_Je_I=e_K$ であるため, 場の部分は $\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(e_Kf)}$ に帰着した．

次に係数を整理する：これは f の直交分解

$$f=e_Kf+\left(e_J-e_K\right)f+\left(1-e_J\right)f$$

と $e_Je_I=e_K$ に注意すれば

$$\mathsf{q}\left((1-e_I)f\right)+\mathsf{q}\left((1-e_J)e_If\right)=\mathsf{q}\left((1-e_J)f\right)$$

が得られる．したがって

$$\mathbb{E}_J\mathbb{E}_IF=\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}\left((1-e_K)f\right)\right)\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(e_Kf)}=\mathbb{E}_K\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(e_Kf)}\tag{48}$$

が成り立つ． □

以上の議論のもとで次のように六つ組を定める．

Definition 4.11. 命題4.10の六つ組 $(\mathcal{Q}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, U_t, R, \mu)$ を特異な共分散 C を持つガウス型 β-マルコフ経路空間と言い, やや簡潔に特異ガウス型 β-マルコフ経路空間と言う.

Theorem 4.12. 物理的ヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ とし, 密度作用素 ρ に付随する左荒木-ウッズ環を考える. このとき密度 ρ の左荒木-ウッズ表現による時刻 0 の正準交換関係を繋絡する一意的なユニタリ写像

$$T_{\mathrm{E}} \colon \mathcal{H} \to \mathcal{F}_{\mathrm{b}}\left((2\epsilon)^{\frac{1}{2}}\,\mathbb{C}\mathcal{X} \oplus (2\bar{\epsilon})^{\frac{1}{2}}\,\overline{\mathbb{C}\mathcal{X}}\right)$$

が存在する. これは

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{E}}1 &= \Omega, \\ T_{\mathrm{E}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_0(g)}T_{\mathrm{E}}^{-1} &= W_{\rho,\mathrm{l}}(g) \end{aligned} \tag{49}$$

をみたす：ベクトル Ω は荒木-ウッズ真空 ω の *GNS* ベクトルである. さらにリウビリアン L と冨田のモジュラー共役作用素 J に対して, 荒木-ウッズ表現での冨田のモジュラー共役作用素を J_{s} とすると

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{E}}L &= d\Gamma_{\mathrm{b}}\left(\epsilon \oplus -\bar{\epsilon}\right) T_{\mathrm{E}}, \\ T_{\mathrm{E}}J &= JT_{\mathrm{E}} \end{aligned} \tag{50}$$

が成り立つ.

Proof. 作用素 T_{E} を構成するには, 線型性と稠密性によって

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_0(g)}\right] &= \exp\left(-\frac{1}{4}\left\langle j_0 g,\, C j_0 g\right\rangle_{\mathcal{Q}_\#}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle g,\, \frac{1+\mathrm{e}^{-\beta\epsilon}}{2\epsilon\left(1-\mathrm{e}^{-\beta\epsilon}\right)} g\right\rangle_{\mathcal{X}}\right) \\ &= \left\langle \Omega_{\mathrm{AW,b}},\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\rho,\mathrm{l}}(g)}\Omega_{\mathrm{AW,b}}\right\rangle \end{aligned} \tag{51}$$

を確認する必要があり, これは明らかである.

リウビリアンに対する繋絡を確認するには, 任意の $0 \le t \le \frac{\beta}{2}$ に対して

$$\mathbb{E}_\mu\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_0(g_1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_0(g_2)}\right] = \left\langle W_{\rho,\mathrm{l}}(g_1)\Omega_{\mathrm{AW,b}},\, \mathrm{e}^{-td\Gamma_{\mathrm{b}}(\epsilon\oplus(-\bar{\epsilon}))}W_{\rho,\mathrm{l}}(g_1)\Omega_{\mathrm{AW,b}}\right\rangle \tag{52}$$

を示せばよい.

モジュラー共役作用素に対する繋絡も同じように示せばよい. □

Theorem 4.13. 任意の正の整数 $n \ge 1$ に対して任意の有限の単調増加列を $\underline{t}_n \in \left[0,\, \frac{\beta}{2}\right]^n$ とし, 任意の $G_1, \cdots, G_n \in \mathcal{N}$ に対して荒木-ウッズ表現での作用素の対応を $\tilde{G}_j = T_{\mathrm{E}}G_jT_{\mathrm{E}}^{-1}$ とする. このとき作用素環上の虚時間時間発展に対する汎関数積分表示

$$\omega\left(\tau_{\mathrm{i}t_1}\left(\tilde{G}_1\right)\cdots\tau_{\mathrm{i}t_n}\left(\tilde{G}_n\right)\right) = \mathbb{E}_\mu\left[U_{t_1}G_1\cdots U_{t_n}G_n\right] \tag{53}$$

が成り立つ.

Proof. 定理4.12の記号を利用する. 線型性と作用素弱位相での稠密性によって $g_j \in \mathcal{X}$ に対して $G_j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(j_0 g_j)}$ とし, 定理での対応 $T_{\mathrm{E}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(j_0 g_j)}T_{\mathrm{E}}^{-1} = W_{\rho,\mathrm{l}}(g_j)$ を利用して示せばよい. 特に

$$\omega\left(\tau_{\mathrm{i}t_1}\left(W_{\rho,\mathrm{l}}(g_1)\right)\cdots\tau_{\mathrm{i}t_n}\left(W_{\rho,\mathrm{l}}(g_n)\right)\right) = \mathbb{E}_\mu\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(j_{t_1}g_1)}\cdots\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(j_{t_n}g_n)}\right]$$

を示せばよい. 左辺は $\tau_{\mathrm{i}t}\left(W_{\rho,\mathrm{l}}(f)\right) = W_{\rho,\mathrm{l}}\left(\mathrm{e}^{-t\epsilon}f\right)$ とワイル関係式を利用して評価できる：各 $j \in \mathcal{X}$ は実ヒルベルト空間の要素であるため, $\mathrm{e}^{-t\epsilon}$ を作用させても荒木-ウッズ表現でのシン

プレクティック形式は全て消える点に注意し, 補題4.7を利用して j_t を処理すれば

$$
\begin{aligned}
&\omega\left(\tau_{\mathrm{it}_1}\left(W_{\rho,\mathrm{l}}(g_1)\right)\cdots\tau_{\mathrm{it}_n}\left(W_{\rho,\mathrm{l}}(g_n)\right)\right)\\
&=\omega\left(W_{\rho,\mathrm{l}}\left(\mathsf{e}^{-t_1\epsilon}g_1+\cdots+\mathsf{e}^{-t_n\epsilon}g_n\right)\right)\\
&=\exp\left(-\frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}K_\beta^{\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{e}^{-t_j}g_j\right\|_{\mathcal{X}}^2\right)\\
&=\exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{j,k}\left\langle j_{t_j}g_j,\, Cj_{t_k}g_k\right\rangle_{\mathcal{Q}_\#}\right)
\end{aligned}
\tag{54}
$$

が得られる. 右辺は特性汎関数から

$$
\mathbb{E}_\mu\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(j_{t_1}g_1)}\cdots\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(j_{t_n}g_n)}\right]=\exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{j,k}\left\langle j_{t_j}g_j,\, Cj_{t_k}g_k\right\rangle_{\mathcal{Q}_\#}\right)
$$

が得られる. 左辺と右辺の値の一致によって求める等式が得られた. □

5 汎関数積分による議論

レゾルベント環に対する3節の議論と同じく, 適切な準局所構成を構築する. 既に全レゾルベント環上の自由ボース気体に対する KMS 状態にあたる確率測度を定式化した. これにも意味はあるものの, 具体的な表示を明らかにするため, 局所系からの極限で構成される零モードを含んだ形で全系の測度を再定式化する. 3節の設定を引き継いだ本節の状況に合わせ, 前節とやや違う記号を利用するため, 改めていくつかの記号を準備する.

5.1 基本設定

円周 $S_\beta=\left[-\frac{\beta}{2},\,\frac{\beta}{2}\right]$ に対して実ヒルベルト空間 $\mathcal{K}=L^2\left(S_\beta;\mathcal{H}_{\mathrm{real}}\right)$ を定め, 実ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ 上の正則化作用素 B をフーリエ変換が

$$
B(\omega,k)=\frac{\left(1+\omega^2\right)^r\left(1+|k|^2\right)^u}{|k|^{2a}\wedge 1}
$$

である関数によるかけ算作用素として定める. 特に三次元の場合は同じく補題4.4の記号のもとで

$$
r=1,\quad u=2,\quad a=\begin{cases}0, & s=1,\\ 1, & s=2\end{cases}
$$

とする. この B を利用して

$$
\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}\#}=\operatorname{dom}B^{\frac{1}{2}}\subset\mathcal{K},\quad \|f\|_{\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}\#}}=\left\|B^{\frac{1}{2}}f\right\|_{\mathcal{K}}
$$

とする. 一方 $\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}}$ はノルム $\|u\|_{\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}}}=\left\|B^{-\frac{1}{2}}u\right\|_{\mathcal{K}}$ による $\operatorname{dom}B^{-\frac{1}{2}}$ の完備化, つまり

$$
\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}}=\overline{\operatorname{dom}B^{-\frac{1}{2}}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}}}}
$$

で定め, この空間の一般的な変数を ϕ で表す. 後で特定するまでこの空間上の一般的な確率測度を μ_{tot} で表す.

空間 $\mathcal{Q}_{\rm tot}$ は可分なヒルベルト空間であるため, 特にボレル加法族は可算生成としてよい. 命題4.6によって $\mathcal{Q}_{\rm tot}$ 上に存在するガウス測度を $\mu_{\rm nz}$ とする：このガウス測度は共分散 C に付随する準双線型形式 $\mathsf{q}_C(f) = \left\| C^{\frac{1}{2}} f \right\|_{\mathcal{K}}^2$ から定める特性汎関数 $\chi_C(f) = \mathsf{e}^{-\frac{1}{4}\mathsf{q}_C(f)}$ に対応する.

定義4.7と同じく任意の $t \in S_\beta$ に対して等距離作用素 j_t を

$$j_t \colon \left(2h \tanh \frac{\beta h}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{H}_{\rm real} \to \mathcal{Q}_{{\rm tot}\#}; \quad j_t g = \delta_t \otimes g \tag{55}$$

で定める. このとき $g_1, g_2 \in \left(2h \tanh \frac{\beta h}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{H}_{\rm real}$ に対して

$$\langle j_{t_1} g_1, j_{t_2} g_2 \rangle_{\mathcal{Q}_{{\rm tot}\#}} = \left\langle g_1, \mathsf{e}^{-|t_1 - t_2| h} \frac{K_\beta}{2h} g_2 \right\rangle_{\mathcal{H}_{\rm real}} \tag{56}$$

が成り立つ. これを利用して鋭時刻場を定める. 特に任意の

$$s \in S_\beta, \quad g \in \left(2h \tanh \frac{\beta h}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{H}_{\rm real}$$

に対して

$$\phi_s(g) = \phi(j_s g) = \phi(\delta_s \otimes g) \in \bigcap_{1 \le p < \infty} L^p\left(\mathcal{Q}_{\rm tot}\right), \quad \phi \in \mathcal{Q}_{\rm tot}$$

とする.

鏡映と時間発展は r と u_t を利用して, まず $\tilde{r}\phi \in \mathcal{Q}_{\rm tot}$ と $\tilde{u}_t \phi \in \mathcal{Q}_{\rm tot}$ を双対性内積を経由して

$$\langle \tilde{r}\phi, f \rangle_{\rm dual} = \langle \phi, rf \rangle_{\rm dual}, \quad \langle \tilde{u}_t \phi, f \rangle_{\rm dual} = \langle \phi, u_t f \rangle_{\rm dual}$$

で定める. さらに $F \in L^\infty\left(\mathcal{Q}_{\rm tot}, \mu_{\rm tot}\right)$ に対して鏡映 R と時間発展 U_t を

$$(RF)(\phi) = F(\tilde{r}\phi), \quad (U_t F)(\phi) = F(\tilde{u}_t \phi)$$

で定め, 線型性と稠密性で $L^2\left(\mathcal{Q}_{\rm tot}, \mu_{\rm tot}\right)$ に拡張する.

準局所構成は以下のように定める. 3節でのレゾルベント環の準局所構成と類似の構成を考える. 特に $L > 0$ に対して $I_L = \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ とし, 複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_L = L^2\left(I_L^d; \mathbb{C}\right)$ 上で上記と同じ構成で各対象を定め, 記号は $\mathcal{H}_L$ のように L を添える形で定める.

ここでは一般の有界領域のネットではなく, 基準長 $L_0 > 0$ を固定し, 条件 $m_n \mid m_{n+1}$ をみたす正の整数の狭義増大列 $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取って $L_n = m_n L_0$ を定めた上で $\left(I_{L_n}^d\right)_{n\in\mathbb{N}}$ による狭義単調列を考える. 同じく I_L 上のフーリエ変換に対応する波数空間を $\Gamma_L = \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}$ とし, $\ell^2\left(\Gamma_L^d\right)$ の完全正規直交系 $\langle e_k \rangle_{k\in\Gamma_L^d}$ を $e_k(m) = \delta_{km}$ で定める. さらに記法の簡略化として $V = L^d$ を導入する. 列の構成によって波数空間で $\Gamma_{L_n}^d \subset \Gamma_{L_{n+1}}^d$ が成り立つ.

特に各 L に対する特異ガウス型 β-マルコフ経路空間を

$$\left(\mathcal{Q}_{{\rm tot},L}, \mathfrak{S}_{{\rm tot},L}, \mathfrak{S}_{{\rm tot},0,L}, R, U_t, \mu_{{\rm tot},L}\right)$$

とする. 鏡映と時間並進は形式的な作用が変わらないため, 特に区別が必要にならない限り添字 L を省略する. この準局所構成がなす列を一般論と合わせて単に局所ネットと言う.

準局所構成での定義によって波数空間での空間的包含 $\Gamma_{L_n}^d \hookrightarrow \Gamma_{L_{n+1}}^d$ から自然な等長埋め込み

$$\tilde{\iota}_{L_n}^{L_{n+1}} \colon \ell^2\left(\Gamma_{L_n}^d\right) \hookrightarrow \ell^2\left(\Gamma_{L_{n+1}}^d\right); \tag{57}$$

$$\left(\tilde{\iota}_{L_n}^{L_{n+1}} \widehat{f}\right)(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k), & k \in \Gamma_{L_n}^d, \\ 0, & k \in \Gamma_{L_{n+1}}^d \setminus \Gamma_{L_n}^d \end{cases} \tag{58}$$

が定まる：記号を簡潔にするため, 誤解の恐れがない限り対応する実空間上の写像も同じく $\tilde{\iota}_{L_n}^{L_{n+1}}$ で表す．これと時間方向のテンソルに対して

$$\iota_{L_n}^{L_{n+1}} = 1 \otimes \tilde{\iota}_{L_n}^{L_{n+1}} \colon \mathcal{K}_{L_n} \to \mathcal{K}_{L_{n+1}}$$

を定める.

さらに $\iota_{L_n}^{L_{n+1}}$ の共役

$$P = \left(\iota_{L_n}^{L_{n+1}}\right)^* \colon \mathcal{K}_{L_{n+1}} \to \mathcal{K}_{L_n}$$

は線型かつ連続で $P\iota_{L_n}^{L_{n+1}} = \mathrm{id}_{K_{L_n}}$ をみたす．この P は正則化で $\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}}$ にも延長され, 延長も同じく P とすればこれは $P\colon \mathcal{Q}_{\mathrm{tot},L_{n+1}} \to \mathcal{Q}_{\mathrm{tot},L_n}$ である．特に P は射影で, 写像 $\pi_{L_n}^{L_{n+1}} = P$ を定める：これは単に波数を $\Gamma_{L_n}^d$ に制限する写像である.

次に等長埋め込みと正則化作用素の可換性を示す.

Lemma 5.1. 等長埋め込み ι と正則化作用素 B は可換である．特に共分散 C とも可換で, 双対性内積 $\langle \phi, f\rangle_{\mathrm{dual}}$ に関する等式として, 任意の $f \in \mathcal{K}_{L_n}$ に対して

$$\left\langle \pi_{L_n}^{L_{n+1}} \phi_{L_{n+1}},\, f \right\rangle_{\mathrm{dual}} = \left\langle \phi_{L_{n+1}},\, \iota_{L_n}^{L_{n+1}} f \right\rangle_{\mathrm{dual}}$$

が成り立つ．記号を見やすくするため, 共分散 C の局所版を q_{C,L_n} のように表すと

$$\mathsf{q}_{C,L_{n+1}}\left(\iota_{L_n}^{L_{n+1}} f\right) = \mathsf{q}_{C,L_n}(f), \quad f \in Q(\mathsf{q}_{C,L_n})$$

が成り立つ.

Proof. もとの埋め込み ι は波数空間での制限でしかなく, 現在の空間の単調列の構成によって $h(k) = |k|^s$ の制限とも整合的である．したがって ι は h またはその作用素解析を繋絡する作用素である．時間方向も含めた ι は時間方向には恒等的に作用するため, 定義によって作用素 B や C に対して繋絡的に作用する.

準双線型形式 q_{C,L_n} は共分散 C_{L_n} に付随するため, その繋絡と等長性を利用すれば, 任意の $f \in \mathcal{K}_{L_{n+1}}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathsf{q}_{C,L_n}\left(\iota_{L_n}^{L_{n+1}} f\right) &= \left\| C_{L_n}^{\frac{1}{2}} \circ \iota_{L_n}^{L_{n+1}} f \right\|_{\mathcal{K}_{L_n}}^2 \\ &= \left\| \iota_{L_n}^{L_{n+1}} \circ C_{L_{n+1}}^{\frac{1}{2}} f \right\|_{\mathcal{K}_{L_{n+1}}}^2 = \mathsf{q}_{C,L_{n+1}}(f) \end{aligned} \tag{59}$$

が成り立つ．双対性内積に関しては任意の $f \in \operatorname{dom} B^{\frac{1}{2}}$ に対して

$$\begin{aligned} &\left\langle \pi_{L_n}^{L_{n+1}} \phi_{L_{n+1}},\, f \right\rangle_{\mathrm{dual}} = \left\langle B_{L_n}^{-\frac{1}{2}} \pi_{L_n}^{L_{n+1}} \phi_{L_{n+1}},\, B_{L_n}^{\frac{1}{2}} f \right\rangle_{\mathcal{K}_{L_n}} \\ &= \left\langle \pi_{L_n}^{L_{n+1}} B_{L_{n+1}}^{-\frac{1}{2}} \phi_{L_{n+1}},\, B_{L_n}^{\frac{1}{2}} f \right\rangle_{\mathcal{K}_{L_n}} \\ &= \left\langle B_{L_{n+1}}^{-\frac{1}{2}} \phi_{L_{n+1}},\, \iota_{L_n}^{L_{n+1}} B_{L_n}^{\frac{1}{2}} f \right\rangle_{\mathcal{K}_{L_{n+1}}} \\ &= \left\langle B_{L_{n+1}}^{-\frac{1}{2}} \phi_{L_{n+1}},\, B_{L_{n+1}}^{\frac{1}{2}} \iota_{L_n}^{L_{n+1}} f \right\rangle_{\mathcal{K}_{L_{n+1}}} \\ &= \left\langle \phi_{L_{n+1}},\, \iota_{L_n}^{L_{n+1}} f \right\rangle_{\mathrm{dual}} \end{aligned} \tag{60}$$

が成り立つ. □

この準局所構成は次の意味で整合的である．

Proposition 5.2. 単調列 $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に付随する等長埋め込み・射影に対して，時間発展や確率測度などの各対象は整合的である．特に任意の自然数 n に対して射影による可測写像を

$$\pi_{L_n}^{L_{n+1}} \colon \left(\mathcal{Q}_{\mathrm{tot},L_{n+1}}, \mathfrak{S}_{\mathrm{tot},L_2}\right) \to \left(\mathcal{Q}_{\mathrm{tot},L_n}, \mathfrak{S}_{\mathrm{tot},L_1}\right)$$

とする．これは以下の性質をみたす．

1. 射影系としての整合性：任意の自然数 n に対して，測度 $\mu_{\mathrm{tot},L_{n+2}}$ に関してほとんど確実に $\pi_{L_n}^{L_{n+2}} = \pi_{L_n}^{L_{n+1}} \circ \pi_{L_{n+1}}^{L_{n+2}}$ が成り立つ．特に任意の $n < m$ に対して同様の整合性が得られる．

2. 場の汎関数と加法族の整合性：任意の $f \in \mathcal{K}_{L_n}$ に対して

$$\left\langle \pi_{L_n}^{L_{n+1}} \phi_{L_{n+1}},\, f \right\rangle_{\mathrm{dual}} = \left\langle \phi_{L_{n+1}},\, \iota_{L_n}^{L_{n+1}} f \right\rangle_{\mathrm{dual}}$$

が成り立つ．特に加法族に対して

$$\begin{aligned} \left(\pi_{L_n}^{L_{n+1}}\right)^{-1} \left(\mathfrak{S}_{\mathrm{tot},0,L_n}\right) &\subset \mathfrak{S}_{\mathrm{tot},0,L_{n+1}}, \\ \left(\pi_{L_n}^{L_{n+1}}\right)^{-1} \left(\mathfrak{S}_{\mathrm{tot},L_n}\right) &\subset \mathfrak{S}_{\mathrm{tot},L_{n+1}} \end{aligned} \tag{61}$$

が成り立つ．

3. 共分散または準双線型形式の整合性：共分散または準双線型形式に対して

$$C_{L_{n+1}} \iota_{L_n}^{L_{n+1}} = \iota_{L_n}^{L_{n+1}} C_{L_n}, \quad \mathfrak{q}_{C,L_{n+1}}\left(\iota_{L_n}^{L_{n+1}} f\right) = \mathfrak{q}_{C,L_n}(f)$$

が成り立つ．

4. 測度の整合性：周辺分布の一致として $\left(\pi_{L_n}^{L_{n+1}}\right)_* \mu_{\mathrm{tot},L_{n+1}} = \mu_{\mathrm{tot},L_n}$ が成り立つ．

5. 鏡映・時間並進の整合性：任意の $p \in [1, \infty]$ に対して

$$U_{L_{n+1},t}\left(F \circ \pi_{L_n}^{L_{n+1}}\right) = \left(U_{L_n,t} F\right) \circ \pi_{L_n}^{L_{n+1}}, \quad F \in L^p\left(\mathcal{Q}_{\mathrm{tot},L_n}\right)$$

と

$$R_{L_{n+1}}\left(F \circ \pi_{L_n}^{L_{n+1}}\right) = \left(R_{L_n} F\right) \circ \pi_{L_n}^{L_{n+1}}, \quad F \in L^p\left(\mathcal{Q}_{\mathrm{tot},L_n}\right)$$

が成り立つ．

記述を簡潔にするため，本命題のもとで $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で考えるべき部分を単に L で表す場合がある．

Proof. (1)：等長埋め込みは定義によって明らかに合成則

$$\iota_{L_n}^{L_{n+2}} = \iota_{L_{n+1}}^{L_{n+2}} \circ \iota_{L_n}^{L_{n+1}}$$

をみたす．特に ι とこの共役である π も同様の整合性をみたす．

(2)：場の作用素に対する等式は補題5.1で示した．加法族 $\mathfrak{S}_{\mathrm{tot},0,L}$ は時刻 0 の鋭時刻場が生成するため，場の作用素に対する等式がそのまま移行する．加法族 $\mathfrak{S}_{\mathrm{tot},L}$ は $\mathfrak{S}_{\mathrm{tot},0,L}$ の時間並進が生成するため，これも明らかである．

(3)：補題5.1で示した．

(4)：ガウス測度は特性汎関数から一意に決まるため, 特性汎関数の整合性を示せばよく, これは本命題 (3) で示した. 具体的には以下のように示せばよい：まず

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\left(\pi_{L_n}^{L_{n+1}}\right)_* \mu_{\mathrm{tot},L_{n+1}}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi_{L_{n+1}}(f)}\right] = \mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{tot},L_{n+1}}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\left\langle \pi_{L_n}^{L_{n+1}}\phi_{L_{n+1}}, f\right\rangle_{\mathrm{dual}}}\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{tot},L_{n+1}}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\left\langle \phi_{L_{n+1}}, \iota_{L_n}^{L_{n+1}} f\right\rangle_{\mathrm{dual}}}\right] = \exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{C,L_{n+1}}\left(\iota_{L_n}^{L_{n+1}} f\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{C,L_n}(f)\right) = \mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{tot},L_n}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi_{L_n}(f)}\right]
\end{aligned}
\tag{62}
$$

が成り立つ. これを L^2 に拡張してから定義関数を与えれば測度に対する整合性が得られる.

(5)：線型包の稠密性を考えれば $f \in \mathcal{K}_{L_n}$ として $F = \mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi_{L_n}(f)}$ に対して示せばよい. 埋め込み $\iota_{L_n}^{L_{n+1}}$ は時間変数には触れないため

$$
\iota_{L_n}^{L_{n+1}}(u_{-t} f) = u_{-t}\left(\iota_{L_n}^{L_{n+1}} f\right), \quad \iota_{L_n}^{L_{n+1}}(r f) = r\left(\iota_{L_n}^{L_{n+1}} f\right)
$$

が成り立つ. 記述を簡潔にするため適宜変数 L を省略する. このとき時間並進に対して

$$
\begin{aligned}
&U_{L_{n+1},t}\left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi_{L_n}(f)} \circ \pi\right) = U_{L_{n+1},t}\left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\langle \pi\phi_{L_n}, f\rangle_{\mathrm{dual}}}\right) \\
&= U_{L_{n+1},t}\left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\langle \phi_{L_n}, \iota f\rangle_{\mathrm{dual}}}\right) \\
&= \exp\left(\mathsf{i}\left\langle \phi_{L_{n+1}}, u_{-t} \circ \iota f\right\rangle_{\mathrm{dual}}\right) = \exp\left(\mathsf{i}\left\langle \phi_{L_{n+1}}, \iota \circ u_{-t} f\right\rangle_{\mathrm{dual}}\right) \\
&= \exp\left(\mathsf{i}\left\langle \pi\phi_{L_{n+1}}, u_{-t} f\right\rangle_{\mathrm{dual}}\right) = U_{L_n,t}\exp\left(\mathsf{i}\left\langle \pi\phi_{L_{n+1}}, f\right\rangle_{\mathrm{dual}}\right) \\
&= \left(U_{L_n,t}\exp\left(\mathsf{i}\left\langle \phi_{L_n}, f\right\rangle_{\mathrm{dual}}\right)\right) \circ \pi
\end{aligned}
\tag{63}
$$

が成り立つ.

鏡映も同じように計算すればよい. □

局所測度の射影極限の存在を示す.

Proposition 5.3. 点列 $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に付随する測度列の射影極限として確率測度が構成できる. さらにこの確率測度は可算生成な加法族上で定義される.

Proof. 射影極限集合 $\mathcal{Q}_{\mathrm{tot},\infty}$ を

$$
\mathcal{Q}_{\mathrm{tot},\infty} = \left\{ (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Q}_{\mathrm{tot},L_n} \,\middle|\, \pi_{L_m}^{L_n}(q_n) = q_m (m \le n) \right\}
$$

とし, 座標射影を $\mathrm{pr}_n \colon \mathcal{Q}_{\mathrm{tot},\infty} \to \mathcal{Q}_{\mathrm{tot},L_n}$ とする. 筒型集合族

$$
\mathfrak{S}_{\mathrm{tot},\infty} = \sigma\left(\left\{\mathrm{pr}_n^{-1}(A) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, A \in \mathfrak{S}_{\mathrm{tot},L_n}\right\}\right)
$$

は可算生成である. 命題5.2での整合性によって, 筒型集合の有限交差上で確率測度の族の有限次元分布は整定義である. コルモゴロフの拡張定理によって押し出し条件 $(\mathrm{pr}_n)_* \mu_{\mathrm{tot},\infty} = \mu_{\mathrm{tot},L_n}$ をみたす確率測度 $\mu_{\mathrm{tot},\infty}$ が取れる. □

自己完結性を高めるため, 3節で定めた準双線型形式 q_0 に対して, 0 次ベッセル関数を利用しない補題を定式化する.

Lemma 5.4. 任意の $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ に対して準双線型形式 q_0 を

$$
\begin{aligned}
\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_0(f)\right) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathsf{e}^{\mathsf{i}\ell_{\beta,r,\theta}(f)}\, d\chi(r,\theta), \\
\ell_{\beta,r,\theta}(f) &= \sqrt{2(2\pi)^d \rho_0(\beta) r}\,\mathrm{Re}\left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta}\hat{f}(0)\right)
\end{aligned}
\tag{64}
$$

のように実現する確率測度 χ が存在する.

Proof. 記述を簡潔にするため, f を固定して $z = \hat{f}(0) = a + \mathsf{i}b$ とし, 汎関数 $\ell_{\beta,r,\theta}$ の係数を $c = \sqrt{2(2\pi)^d \rho_0(\beta)}$ とする.

まずガウス型確率変数の特性関数を調べる. 二次元かつ互いに独立で, 共分散が $\frac{1}{2}$ である中心化されたガウス型確率変数を (X, Y) とすると

$$\mathbb{E}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}(ax+by)}\right] = \mathsf{e}^{-\frac{1}{4}(a^2+b^2)}$$

をみたす. さらに $G_f = c\,\mathrm{Re}\left((X + \mathsf{i}Y)z\right) = c(aX - bY)$ とすれば, これは一次元の中心化ガウス型確率変数である. 分散は

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left[G_f\right] &= c^2\,\mathrm{Var}\left[aX - bY\right] = c^2\left(a^2\,\mathrm{Var}\,X + b^2\,\mathrm{Var}\,Y\right) \\ &= c^2\frac{a^2+b^2}{2} = \frac{c^2\,|z|^2}{2} \end{aligned} \tag{65}$$

のように計算できるため

$$\mathbb{E}_{(X,Y)}\left[\exp\left(\mathsf{i}c\,\mathrm{Re}\left((X + \mathsf{i}Y)z\right)\right)\right] = \mathsf{e}^{-\frac{1}{4}\mathsf{q}_0(f)}$$

が成り立つ.

二次元の $\mathbb{R}^2$ を二次元極座標で表し, 動径方向・角度方向の測度をそれぞれ

$$d\nu(r) = \mathsf{e}^{-r}\,dr, \quad d\lambda(\theta) = \frac{1}{2\pi}\,d\theta$$

としてこの直積測度を χ とする. 確率変数として $\omega = (r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ に対して $R(\omega) = r$ かつ $\Theta(\omega) = \theta$ を定める. これらは

$$R = X^2 + Y^2, \quad \Theta = \arg(X + \mathsf{i}Y)$$

をみたし, 可測写像として意味を持つ. これらは

$$\sqrt{R}\,\mathrm{Re}\left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\Theta}z\right) = \mathrm{Re}\left((X + \mathsf{i}Y)z\right), \quad \ell_{\beta,R,\Theta}(f) = c\,\mathrm{Re}\left((X + \mathsf{i}Y)z\right)$$

をみたす. 積分表示を書き換えると

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} \mathsf{e}^{\mathsf{i}\ell_{\beta,r,\theta}(f)}\,d\chi(r,\theta) = \mathbb{E}_{(R,\Theta)}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\ell_{\beta,R,\Theta}(f)}\right] \\ &= \mathbb{E}_{(X,Y)}\left[\exp\left(\mathsf{i}c\,\mathrm{Re}\left((X + \mathsf{i}Y)z\right)\right)\right] \end{aligned} \tag{66}$$

が得られる. 先の一次元ガウス型確率変数の特性関数の議論によって

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} \mathsf{e}^{\mathsf{i}\ell_{\beta,r,\theta}(f)}\,d\chi(r,\theta) = \mathbb{E}_{(X,Y)}\left[\exp\left(\mathsf{i}c\,\mathrm{Re}\left((X + \mathsf{i}Y)z\right)\right)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{1}{4}c^2 z^2\right) = \exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_0(f)\right) \end{aligned} \tag{67}$$

が得られる. □

3節で定めた準双線型形式 $\mathsf{q}_{\mathrm{BEC}}$ に対して

$$\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{BEC}}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}\right] = \exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{BEC}}(f)\right)$$

の形で付随する $\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}}$ 上の確率測度を μ_{BEC} とする.

Proposition 5.5. 化学ポテンシャル $\mu < 0$ を復活させた上で局所測度の極限 $L \to \infty$ を取った後, 化学ポテンシャルに対して $\mu \uparrow 0$ の極限を取ると, 任意の $f \in \mathcal{D}_{0,\beta}$ で

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{BEC}}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(j_0 f)}\right] &= \exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_0(f)\right)\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{nz}}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(j_0 f)}\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{nz}}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\left(\phi(j_0 f)+\ell_{\beta,r,\theta}(f)\right)}\right]d\chi(r,\theta)\end{aligned} \tag{68}$$

が成り立つ. 特に q_0 は U_t の作用で不変である.

Proof. 定義によって q_0 は波数空間での原点での値を評価している. 時間並進 U_t は $\mathsf{e}^{-\beta h(0)} = 1$ で作用するため, q_0 への作用の自明性が得られた.

測度の評価と極限を得るには特性汎関数を評価すればよい. いったん $L > 0$ を固定して任意の $f \in \ell^2\left(\Gamma_L^d\right)$ を取ると

$$\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{tot},L}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(j_0 f)}\right] = \exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz},\mu,L}(f)\right)$$

が成り立つ. 上記の f に対して $f_k = \langle f, e_k\rangle$ とする. 波数空間にうつって計算すると

$$\mathsf{q}_{\mathrm{nz},\mu,L}(f) = \sum_{k\in\Gamma_L^d}\frac{1+\mathsf{e}^{-\beta(h(k)-\mu)}}{1-\mathsf{e}^{-\beta(h(k)-\mu)}}|f_k|^2 = \mathsf{q}_{0,\mu,L}(f) + \mathsf{q}_{\mathrm{nz},\mu,L}(f) \tag{69}$$

が成り立つ. 定義によって $f \in Q(\mathsf{q}_0) \cap Q(\mathsf{q}_{\mathrm{nz}})$ とすれば, ボース-アインシュタイン凝縮発現条件下で $L \to \infty$ のあと $\mu \downarrow 0$ を取ると

$$\mathsf{q}_{\mathrm{nz},\mu,L}(f) \to \mathsf{q}_{\mathrm{BEC}}(f) = \mathsf{q}_0(f) + \mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(f)$$

が得られる. あとはこれを指数の肩に戻せばよい.

系5.4によって

$$\exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_0(f)\right) = \int_{\mathbb{R}^2}\exp\left(\mathsf{i}\ell_{\beta,r,\theta}(f)\right)d\chi(r,\theta)$$

のように書ける. これを代入すれば

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{BEC}}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(j_0 f)}\right] = \exp\left(-\frac{1}{4}\mathsf{q}_0(f)\right)\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{nz}}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(j_0 f)}\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\mathsf{e}^{\mathsf{i}\ell_{\beta,r,\theta}(f)}\,d\chi(r,\theta)\cdot\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{nz}}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(j_0 f)}\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{nz}}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\left(\phi(j_0 f)+\ell_{\beta,r,\theta}(f)\right)}\right]d\chi(r,\theta)\end{aligned} \tag{70}$$

が得られる. □

5.2 秩序変数とボース-アインシュタイン凝縮の発現

各 I_L^d の定義関数を利用して

$$\mathsf{b}_L^{(0)} = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}\mathbf{1}_{I_L^d}, \quad \mathsf{b}_L^{(1)} = \frac{1}{V}\mathbf{1}_{I_L^d}$$

を定める. これらは $\# = 0, 1$ に対して $\mathsf{b}_L^{(\#)} = \frac{1}{V^{\frac{1+\#}{2}}}\mathbf{1}_{I_L^d}$ とも表せ, さらに

$$\left\|\mathsf{b}_L^{(0)}\right\|_{L^2\left(I_L^d\right)} = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^d}\mathsf{b}_L^{(1)}(x)\,dx = 1, \quad \left\|\mathsf{b}_L^{(1)}\right\|_2 = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \to 0$$

をみたす．このとき局所確率測度に対する期待値の極限として

$$\mathsf{o}_{\mathrm{BEC}}^{(\#)} = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{\mathsf{i}} \mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{tot},L}} \left[\frac{1}{\mathsf{i} - \phi\left(j_0 \mathsf{b}_L^{(\#)}\right)} \right] \in [0,\ 1]\,, \quad \# = 0, 1$$

を定め, 秩序変数と言う．

もちろん命題3.6と同じ議論が成り立つ．

Proposition 5.6. 次の同値性が成り立つ．

1. 零モードが意味を持ち, ボース-アインシュタイン凝縮が発現する．
2. 秩序変数は $\mathsf{o}_{\mathrm{BEC}}^{(0)} = 0$ である．
3. 秩序変数は $\mathsf{o}_{\mathrm{BEC}}^{(1)} < 1$ である．

Proof. 命題3.6と同じように計算すればよい．まず

$$\frac{1}{\mathsf{i} - \phi\left(j_0 \mathsf{b}_L^{(\#)}\right)} = \int_0^\infty \mathsf{e}^{-t} \mathsf{e}^{\mathsf{i}t\phi\left(j_0 \mathsf{b}_L^{(\#)}\right)}\, dt$$

が成り立つ．この期待値を取ると

$$\mathbb{E}_{\mu_f \mathrm{tot},L} \left[\frac{1}{\mathsf{i} - \phi\left(j_0 \mathsf{b}_L^{(\#)}\right)} \right] = \int_0^\infty \mathsf{e}^{-t} \mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{tot},L}} \left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}t\phi\left(j_0 \mathsf{b}_L^{(\#)}\right)} \right] dt$$

が得られる．あとは $\# = 0, 1$ にわけて計算すればよい．

(1)⇔(2)：命題3.6と同じく

$$\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{tot},L}} \left[\frac{1}{\mathsf{i} - \phi\left(j_0 \mathsf{b}_L^{(0)}\right)} \right] = \int_0^\infty \mathsf{e}^{-t} \exp\left(-\frac{t^2}{4} \frac{y_V + 1}{y_V - 1} \right) dt$$

が成り立つ．あとは命題3.6と同様の議論による．

(1)⇔(3)：命題3.6と同じく

$$\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{tot},L}} \left[\frac{1}{\mathsf{i} - \phi\left(j_0 \mathsf{b}_L^{(1)}\right)} \right] = \int_0^\infty \mathsf{e}^{-t} \exp\left(-\frac{t^2}{4} (y_V + 1) \frac{N_0(y_V)}{V} \right) dt$$

が成り立つ．あとは命題3.6と同様の議論による． □

以下, 原則としてボース-アインシュタイン凝縮が発現している状況だけを考える．

5.3 正則条件つき確率測度による直積分分解

ここまでは3節での作用素環的な議論の復元にすぎず, 確率論として正統的な議論の組み方とは限らない．3.9節以降のような正則条件つき確率測度を切り出すために議論を切り直す．

全系の時間並進群 U_t に対して U_t-不変加法族を

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^U &= \left\{ A \in \mathfrak{S}_{\mathrm{tot}} \,\middle|\, \text{全ての } t \in \mathbb{R} \text{ に対して } U_t^{-1}(A) = A \text{ が成り立つ.} \right\}, \\ \mathfrak{S}_{\mathrm{tot},0}^U &= \left\{ A \in \mathfrak{S}_{\mathrm{tot},0} \,\middle|\, \text{全ての } t \in \mathbb{R} \text{ に対して } U_t^{-1}(A) = A \text{ が成り立つ.} \right\} \end{aligned} \tag{71}$$

で定める．さらに U_t-不変測度がなす凸集合を

$$\mathrm{Prob}^U(\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}}) = \left\{ \nu \in \mathrm{Prob}(\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}}) \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{全ての } t \in \mathbb{R} \text{ に対して} \\ \nu \circ U_t^{-1} = \nu \text{ が成り立つ.} \end{array} \right\}$$

で定める．

Proposition 5.7. 以下の条件をみたす, 不変加法族 $\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^U$ に関する正則条件つき確率測度 $q \mapsto \mu_q \in \mathrm{Prob}(\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}})$ が存在する.

1. 測度の分解：任意の $A \in \mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}$ に対して $q \mapsto \mu_q(A)$ は $\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^U$-可測で, 測度 μ_{BEC} に関してほとんど確実に

$$\mu_{\mathrm{BEC}}(A) = \int_{\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}}} \mu_q(A)\, d\mu_{\mathrm{BEC}}(q), \quad \mu_q(A) = \mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{BEC}}}\left[\mathbf{1}_A \middle| \mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^U\right](q)$$

をみたす.

2. 不変性：確率測度 μ_{BEC} に対してほとんど確実な q に関して μ_q は U-不変である. つまり全ての $t \in \mathbb{R}$ に対して $\mu_q \circ U_t^{-1} = \mu_q$ が成り立つ.

3. エルゴード性：μ_{BEC} に関してほとんど確実な q に関して μ_q は U-エルゴードである. つまり全ての $A \in \mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^U$ に対して $\mu_q(A) \in \{0,1\}$ が成り立つ.

4. エルゴード分解の一意性：写像

$$\pi\colon \mathcal{Q}_{\mathrm{tot}} \to \mathrm{Prob}^U(\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}}); \quad \pi(q) = \mu_q$$

による押し出し測度 $\mathbb{P} = \mu_{\mathrm{BEC}} \circ \pi^{-1} \in \mathrm{Prob}\left(\mathrm{Prob}^U(\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}})\right)$ によって

$$\mu_{\mathrm{BEC}} = \int_{\mathrm{Prob}^U(\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}})} \nu\, d\mathbb{P}(\nu)$$

が成り立ち, 測度 $\mathbb{P}$ に関してほとんど確実に ν は U-エルゴードである.

注意3.8, 命題3.10などに対応する. このままでは抽象的な命題でしかいため, 命題5.5と適切に結びつける必要があり, 別途命題5.8で議論する.

Proof. (1)：4節の議論によって $\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}$ は可算生成性を持ち, 特に $(\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}}, \mathfrak{S}_{\mathrm{tot}})$ は標準ボレル空間である. ロホリン-フォン・ノイマンの分解定理によって, 言明の条件をみたす $\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^U$ に関する正則条件つき確率測度 $q \mapsto \mu_q$ が取れる.

(2)：任意の $t \in \mathbb{R}$ と $A \in \mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}$ に対して

$$\mu_q \circ U_t^{-1}(A) = \mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{BEC}}}\left[\mathbf{1}_{U_t^{-1}(A)} \middle| \mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^U\right](q) = \mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{BEC}}}\left[\mathbf{1}_A \circ U_t \middle| \mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^U\right](q)$$

が成り立つ. 本命題 (1) の分解によって μ_{BEC} も U_t-不変である. したがって条件つき期待値は U_t と可換である：特に

$$\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{BEC}}}\left[\mathbf{1}_A \circ U_t \middle| \mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^U\right] = \mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{BEC}}}\left[\mathbf{1}_A \middle| \mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^U\right] \circ U_t \quad (\mu\text{-a.s.})$$

が成り立つ. したがって μ_{BEC} に関してほとんど確実に $\mu_q \circ U_t^{-1}(A) = \mu_{U_t q}(A)$ が成り立つ. 特に $A \in \mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^U$ なら $U_t^{-1}(A) = A$ であるため $\mu_q(A) = \mu_{U_t q}(A)$ が成り立つ. この同値性によって μ_{BEC} に関してほとんど確実に $\mu_q \circ U_t^{-1} = \mu_q$ が成り立つ.

(3)：任意の $A \in \mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^U$ を取ると $\mathbf{1}_A$ は $\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^U$-可測であるため

$$\mu_q(A) = \mathbb{E}_{\mu}\left[\mathbf{1}_A \middle| \mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^U\right](q) = \mathbf{1}_A(q) \in \{0,1\} \quad (\mu_{\mathrm{BEC}}\text{-a.s.})$$

が成り立つ. したがって μ_{BEC} に関してほとんど確実な q で μ_q は U-エルゴードである.

(4)：定義のように $\pi(q) = \mu_q$ かつ $\mathbb{P} = \mu_{\mathrm{BEC}} \circ \pi^{-1}$ とする. 任意の有界な可測関数 f に対して

$$\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{BEC}}}[f] = \int_{\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}}} \mathbb{E}_{\mu_q}[f]\, d\mu_{\mathrm{BEC}}(q) = \int_{\mathrm{Prob}^U(\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}})} \mathbb{E}_{\nu}[f]\, d\mathbb{P}(\nu) \tag{72}$$

が成り立つ. したがって $\mu_{\mathrm{BEC}} = \int_{\mathrm{Prob}^U(\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}})} \nu\, d\mathbb{P}(\nu)$ が成り立つ. 本命題 (3) によって $\mathbb{P}$ に関して ν はエルゴード的である. □

命題5.5の言明または証明の最終段を参考に, 極座標としての $(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$\mathbb{E}_{\mu_{r,\theta}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(j_0 f)}\right]=\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{nz}}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\left(\phi(j_0 f)+\ell_{\beta,r,\theta}(f)\right)}\right]\quad(f\in\mathcal{D}_{0,\beta})$$

として成分測度 $\mu_{r,\theta}$ を定め, 特性汎関数と確率測度対応の一意性を介して $\left(\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}},\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^{\#}\right)$ 上の確率測度に拡張する.

次に全測度を正則条件つき確率測度でエルゴード分解する.

Proposition 5.8. *1.* 混合表示・測度の分解：任意の有界な可測関数 F に対して

$$\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{BEC}}}[F]=\int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{E}_{\mu_{r,\theta}}[F]\,d\chi(r,\theta)$$

が成り立つ. 特に測度の分解 $\mu_{\mathrm{BEC}}=\int_{\mathbb{R}^2}\mu_{r,\theta}\,d\chi(r,\theta)$ が成り立つ.

2. 不変性：ほとんど確実な (r,θ) に対して $\mu_{r,\theta}$ は U-不変である. 特に全ての $t\in\mathbb{R}$ に対して $\mu_{r,\theta}\circ U_t^{-1}=\mu_{r,\theta}$ が成り立つ.

3. エルゴード性：ほとんど確実な (r,θ) に対して $\mu_{r,\theta}$ は U-エルゴードである. 特に $A\in\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^{U}$ に対して $\mu_{r,\theta}(A)\in\{0,1\}$ が成り立つ.

4. 正則条件つき確率測度としての具体化：命題*5.7*が与える抽象的な $\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}\ni q\mapsto\mu_q$ に対して $\mu_q=\mu_{\kappa(q)}$ を与える $\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}^{U}$-可測写像 $\kappa\colon\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}}\to\mathbb{R}^2$ が存在する. 特に $\kappa_*\mu_{\mathrm{BEC}}=\chi$ をみたす.

Proof. (1)：関数 $\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}$ が生成する筒型関数の族である $*$-環は $\mathfrak{S}_{\mathrm{tot}}$ を生成する. 両辺は有界かつ線型で単調族定理で拡張できるため, 成分測度から定まる積分は任意の有界な可測関数に拡張される. 関数 F を任意の可測集合に対する定義関数とすれば測度の分解が得られる.

(2)：本命題 (1) と命題5.7(2) の一意性による.

(3)：命題5.7(4) でエルゴード分解の一意性が得られている. 本命題 (2) によって成分測度 $\mu_{r,\theta}$ は U-不変であるため, 本命題 (1) の分解は命題5.7(4) の一形態である. エルゴード分解の一意性によって本命題 (1) の分解はエルゴード分解でなければならない. 特にほとんど確実に $\mu_{r,\theta}$ は U-エルゴード測度である.

(4)：本命題 (3) の言い換えである. □

任意の $f\in\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}\#}$ に対してゲージ群の作用を位相回転 $f\mapsto\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta_0}f$ とし, さらに $\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}}$ 上の筒型価数への引き戻しを定める. 特に任意の $\theta_0\in\mathbb{R}$ と筒型関数 F に対して γ_{θ_0} を

$$(\gamma_{\theta_0}F)(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))=F\left(\phi\left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta_0}f_1\right),\cdots,\phi\left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta_0}f_n\right)\right)$$

で定める. あとは閉包で全空間に拡張する.

5.4 ゲージ変換・対称性の破れ・混合性とその崩壊

Proposition 5.9. *1.* 成分測度はゲージ不変ではない. 特に任意の $\theta_0\in\mathbb{R}$ に対して

$$\mu_{r,\theta}\circ\gamma_{\theta_0}^{-1}=\mu_{r,\theta+\theta_0}$$

が成り立つ.

2. 閉軌道性：集合 $\{\mu_{r,\theta}\,|\,\theta\in\mathbb{R}\}$ はゲージ変換で閉じている.

3. 全系の測度はゲージ不変である.

Proof. (1)：筒型関数 $F = \mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}$ に対して示せば十分である．定義によって

$$\mathbb{E}_{\mu_{r,\theta}\circ\gamma_{\theta_0}^{-1}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}\right] = \mathbb{E}_{\mu_{r,\theta}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta_0}f)}\right]$$

が成り立つ．あとは定義によって

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_{r,\theta}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta_0}f)}\right] &= \mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{nz}}}\left[\exp\left(\mathsf{i}\phi(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta_0}f) + \mathsf{i}\ell_{\beta,r,\theta}(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta_0}f)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{nz}}}\left[\exp\left(\mathsf{i}\phi(f) + \mathsf{i}\ell_{\beta,r,\theta+\theta_0}(f)\right)\right] = \mathbb{E}_{\mu_{r,\theta+\theta_0}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}\right]\end{aligned} \tag{73}$$

が成り立つ．

(2)：本命題 (1) による．

(3)：命題5.8(1) の測度の分解によって

$$\mu_{\mathrm{BEC}}\circ\gamma_{\theta_0}^{-1} = \int_{\mathbb{R}^2}\left(\mu_{r,\theta}\gamma_{\theta_0}^{-1}\right)d\chi(r,\theta) = \int_{\mathbb{R}^2}\mu_{r,\theta+\theta_0}\,d\chi(r,\theta)$$

が得られる．あとは本命題 (2) による． □

作用素環でのクラスター性に対応する概念が混合性である．

Proposition 5.10. *1.* 成分測度は U-混合的である．特に全ての $F, G \in L^\infty(\mathcal{Q}_{\mathrm{tot}}, \mathfrak{S}_{\mathrm{tot}})$ に対して

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_{\mu_{r,\theta}}\left[F\cdot(G\circ U_t)\right] = \mathbb{E}_{\mu_{r,\theta}}[F]\,\mathbb{E}_{\mu_{r,\theta}}[G]$$

が成り立つ．

2. 全系の *BEC* 測度は U-混合性を持たない．特に

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{BEC}}}\left[F\cdot(G\circ U_t)\right] \neq \mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{BEC}}}[F]\,\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{BEC}}}[G]$$

をみたす有界可測な F, G が存在する．

Proof. 指数型の筒型関数は生成系であるため, 特に $F = \mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}$ と $G = \mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(g)}$ に対して示せばよい．

(1)：成分測度の定義によって

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_{r,\theta}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}(\phi(f+U_tg)}\right] &= \mathsf{e}^{-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(f+U_tg)+\mathsf{i}\ell_{\beta,r,\theta}(f+U_tg)}, \\ \mathbb{E}_{\mu_{r,\theta}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi(f)}\right]\cdot\mathbb{E}_{\mu_{r,\theta}}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{i}U_tg}\right] &= \mathsf{e}^{-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(f)-\frac{1}{4}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(g)+\mathsf{i}\ell_{\beta,r,\theta}(f)+\mathsf{i}\ell_{\beta,r,\theta}(g)}\end{aligned} \tag{74}$$

が成り立つ．したがって混合性は交差項 $\lim_{t\to\infty}\mathsf{q}_{\mathrm{nz}}(f, U_tg)$ の挙動で決まる．かけ算作用素としての h の絶対連続性とリーマン-ルベーグの補題によって実際にこれは消える．したがって混合性が得られる．

(2)：命題5.5の $\mathsf{e}^{-\frac{1}{4}\mathsf{q}_0(f)}$ の挙動を調べればよい．このとき $\widehat{h}(0) = 0$ によって $\mathsf{q}_0(f + \mathsf{e}^{ith}g) = \mathsf{q}_0(f+g)$ が成り立つ．特に q_0 に関する交差項が消えないため, 成分測度と違って混合性が崩壊する． □

References

[1] Asao Arai. *Analysis on Fock Spaces and Mathematical Theory of Quantum Fields: An Introduction to Mathematical Analysis of Quantum Fields*. World Scientific Pub Co Inc, 2 2018.

[2] H. Araki and E. J. Woods. Representations of the canonical commutation relations describing a nonrelativistic infinite free bose gas. *J. Math. Phys.*, 4:637–662, 1963.

[3] O. Bratteli and D. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, volume 1 of *Theoretical and Mathematical Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 11 2010.

[4] O. Bratteli and D. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, volume 2 of *Theoretical and Mathematical Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 7 2013.

[5] D. Buchholz and H. Grundling. Quantum systems and resolvent algebras. *arXiv:13060860*, pages 1–15, 6 2013.

[6] Detlev Buchholz. The resolvent algebra: Ideals and dimension. 266:3286–3302, March 2014.

[7] Detlev Buchholz. The resolvent algebra of non-relativistic bose fields: Observables, dynamics and states. *Commun. Math. Phys.*, 362:949–981, May 2018.

[8] Detlev Buchholz and Hendrik Grundling. The resolvent algebra: A new approach to canonical quantum systems. *Journal of Functional Analysis*, 254:2725–2779, June 2008.

[9] Jan Dereziński and Christian Gérard. *Mathematics of Quantization and Quantum Fields*. Cambridge University Press, 2022.

[10] M. Fannes, B. Nachtergaele, and A. Verbeure. The equilibrium states of the spin-boson model. *Commun. Math. Phys.*, 114:537–548, 1988.

[11] Rudolf Haag. *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. Springer, 1996.

[12] Abel Klein and Lawrence J. Landau. Stochastic processes associated with kms states. *Journal of Functional Analysis*, pages 368–428, 6 1979.

[13] J. Lörinczi and F. Hiroshima. *Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space: Applications in Rigorous Quantum Field Theory (2)*, volume 2. Walter De Gruyter, 3 2020.

[14] Y. Sekine. Magnetism and infrared divergence in a hubbard-phonon interacting system. *arxiv:10082056*, pages 1–9, 8 2010.

[15] Y. Sekine. Phonon bose-einstein condensation in a hubbard-phonon interacting system with infrared divergence. *arxiv:13085589*, pages 1–14, 8 2013.

[16] 新井朝雄. 『量子統計力学の数理』. 共立出版, 7 2008.